Resolução

Esta resolução destina-se a verificar a correção da prova. Não se destina a estudo ou revisão.
Para enfatizar os pontos importantes, estas resoluções omitirão detalhes que são principalmente algorítmicos, como cálculos. Além disso, algumas das perguntas foram personalizadas usando o número do estudante. Nesses casos, a resolução pode não abranger todos os valores de r, ou omitir etapas que dependem de r.
Qualquer ausência de detalhes não implica que tal omissão seja aceitável nas submissões dos alunos.

I. (*3,0 valores*) Neste exercício, o valor de r é o último dígito do seu número de estudante mais 1. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 5 + 1 = 6$.

Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) (*2,0 valores*) $S = \{p \in \mathbb{R}[x] : 2p(r) + p(-1) = 0\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}[x]$.

Resolução: Verdadeiro: Claramente $S \subseteq \mathbb{R}[x]$

Se p_0 é o polinómial nulo, então $2p_0(r) + p_0(-1) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$, portanto $p_0 \in S$.

Se $p, q \in S$, então $2p(r) + p(-1) = 0$ e $2q(r) + q(-1) = 0$. Pois
$2(p + q)(r) + (p + q)(-1) = 2(p(r) + q(r)) + p(-1) + q(-1) = 2p(r) + p(-1) + 2q(r) + q(-1) = 0 + 0 = 0$
e portanto $p + q \in S$.

Se $p \in S, \alpha \in \mathbb{R}$, então $2p(r) + p(-1) = 0$. Pois
$2(\alpha p)(r) + (\alpha p)(-1) = 2\alpha p(r) + \alpha p(-1) = \alpha(2p(r) + p(-1)) = \alpha \cdot 0 = 0$,
e portanto $\alpha p \in S$. Pois S é um subespaço de $\mathbb{R}[x]$.

b) (*1,0 valor*) Existe uma aplicação linear $T : \mathbb{C}^{11} \to \mathbb{C}^{11}$ tal que

$$\dim(\text{Nuc } T \cap \text{Im } T) = r.$$

Resolução:

Se $1 \leqslant r \leqslant 5$, VERDADEIRO. A resolução depende de valor de r.
Por examplo, se $r = 3$, seja $T(a_1, \ldots, a_{11}) = (0, 0, 0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_8)$, então T é linear e

$$(\text{Nuc } T \cap \text{Im } T) = \text{Nuc } T = \{(0, \ldots, 0, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

com dimensão 3. (detalhes omitidas)
(existem outras resoluções por $r = 3$).

Se $6 \leqslant r \leqslant 10$, FALSO.

Se $\dim(\text{Nuc } T \cap \text{Im } T) = r$, então $\dim(\text{Nuc } T) \geqslant r$, e $\dim(\text{Im } T) \geqslant r$. Mas então $11 = \dim \mathbb{C}^{11} = \dim(\text{Nuc } T) + \dim(\text{Im } T) \geqslant 6 + 6 = 12$. Isto é uma contradição, portanto, esse T não pode existir.

II. (*3,0 valores*) Seja V um espaço vetorial e $T : V \to V$ uma aplicação linear, tal que $T(T(v)) = T(v)$ para todos os vetores $v \in V$. Mostre que $V = \text{Nuc } T \oplus \text{Im } T$.

Resolução: Seja $v \in V$. Considere $w = v - T(v), u = T(v)$. Claramente $v = w + u$, e $u \in \text{Im } T$.

Temos $T(w) = T(v - T(v)) = T(v) - T(T(v)) = T(v) - T(v) = 0$. Pois $w \in \text{Nuc } T$, e portanto $v = w + u \in \text{Nuc } T + \text{Im } T$.

Se $v \in \text{Nuc } T \cap \text{Im } T$, então $v = T(w)$ por algum $w \in V$. Mas $v = T(w) = T(T(w)) = T(v) = 0$, como $v \in \text{Nuc } T$. Portanto $\text{Nuc } T \cap \text{Im } T = \{0\}$, e $V = \text{Nuc } T \oplus \text{Im } T$

III. (*4,0 valores*) Neste exercício, o valor de r é os últimos 2 dígitos do seu número de estudante menos 50. Por exemplo, se o seu número de estudante for 2002345, então $r = 45 - 50 = -5$.

Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) (*2,0 valores*) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

Resolução: O polinómio caracteristico de A é

$$\det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -6 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & r \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda) \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -6 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-\lambda)((-2-\lambda)(3-\lambda) + 6) = (-\lambda)(-6 + (2-3)\lambda + \lambda^2 + 6)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(1-\lambda).$$

Portanto, os valores próprios de A são 0 e 1, com $\text{ma}(0) = 2$ e $\text{ma}(1) = 1$.

b) (*2,0 valores*) Determine se A é diagonalizável.

Resolução: Porque $1 \leqslant \mathrm{mg}(1) \leqslant \mathrm{ma}(1) = 1$, temos $\mathrm{mg}(1) = \mathrm{ma}(1)$. Portanto, A é diagonalizável se e só se $\mathrm{mg}(0) = \mathrm{ma}(0) = 2$.

Temos $E_0(A) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = 0\}$, e portanto $E_0(A)$ é o espaço nulo $\mathcal{N}(A)$ de A, e $\mathrm{mg}(0) = \dim E_0(A) = \dim \mathcal{N}(A)$ é a nuidade de A.

A matrix A é equivalente por linhas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & r-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(detalhes omitidas)

Caso $r \neq 1$: neste caso $E_0(A) = \{(-3b, b, 0)^T : b \in \mathbb{R}\} = \langle(-3, 1, 0)^T\rangle$. (detalhes omitidas)

Pois $\mathrm{mg}(0) = 1 < \mathrm{ma}(0)$, e A não é diagonalizável.

Caso $r = 1$: neste caso $E_0(A) = \{(-3b - c, b, c)^T : b, c \in \mathbb{R}\} = \langle(-3, 1, 0)^T, (-1, 0, 1)^T\rangle$. (detalhes omitidas)

Pois $\mathrm{mg}(0) = 2 = \mathrm{ma}(0)$, e A é diagonalizável.

IV. (*3,0 valores*) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertiveis e $\alpha \neq 0$ um valor próprio de AB^{-1}. Mostre que α é um valor próprio de $B^{-1}A$.

Resolução: Por que α é uma valor próprio de AB^{-1}, existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tal que $AB^{-1}v = \alpha v$. Seja $w = B^{-1}v$. Então $w \neq 0$, porque $v \neq 0$ e B^{-1} é invertível.

Temos

$$B^{-1}Aw = B^{-1}A(B^{-1}v) = B^{-1}(AB^{-1})v = B^{-1}\alpha v = \alpha(B^{-1}v) = \alpha w$$

Pois w é um vetor próprio do $B^{-1}A$, e α é o seu valor próprio.

V. (*5,0 valores*)

Para $k, l \in \mathbb{R}$ considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = & 0 \\ \qquad 2y - kz = & l \\ -x - y - 2z = & 3\,. \end{cases} \tag{1}$$

Determine para cada par $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ o número de resoluções do sistema (1).

Resolução: Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -k \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 3 \end{bmatrix}$.
O sistema (1) corresponde à equação $Ax = b$. $[A|b]$ é equivalente por linhas a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -k-2 & l-6 \end{array}\right]$$

(detalhes omitidos).

Portanto, se $k = -2$ e $l \neq 6$, então o sistema não tem solução, pois a última linha implica $0 = l - 6 \neq 0$, uma contradição.

Se $k = -2$ e $l = 6$, então $2 = r(A) = r([A|b]) < 3$, o sistema tem um número infinito de soluções

Se $k \neq -2$ (e l arbitrário), então $r(A) = 3 = r([A|b])$, o sistema tem uma solução unica.

VI. (*2,0 valores*)

Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível tal que adj $A = 2I_3$. Demonstre que det $A \in \{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\}$.

Resolução: Para qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tem-se B adj $B = |B|I_3$. Dado que $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e adj $A = 2I_3$ podemos afirmar que $A(2I_3) = |A|I_3$, isto é, que $2A = |A|I_3$. Consequentemente

$$|2A| = ||A|I_3| \Leftrightarrow 2^3|A| = |A|^3|I_3| \Leftrightarrow 8|A| = |A|^3$$

$$\Leftrightarrow |A|^3 - 8|A| = 0 \Leftrightarrow |A|(|A|^2 - 8) = 0.$$

Porque A é invertível com $|A| \neq 0$, temos det $A \in \{\sqrt{8}, -\sqrt{8}\}$.

Fim