Breve resolução do p-fólio de 17 de julho

I. Questões de escolha múltipla:

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Exame	$b)$	$d)$	$a)$	$c)$
P-fólio	$d)$	$a)$	$c)$	–

II. A afirmação é verdadeira.

Supondo que as matrizes invertíveis A e B comutam, multiplicando $AB = BA$ à esquerda por $B^{-1}A^{-1}$ e à direita por $A^{-1}B^{-1}$ obtem-se

$$\begin{aligned} AB = BA &\Longrightarrow B^{-1}A^{-1}(AB)A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}(BA)A^{-1}B^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}I_nBA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}BI_nB^{-1} \\ &\Longrightarrow B^{-1}BA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}BB^{-1} \\ &\Longrightarrow I_nA^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}I_n \\ &\Longrightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \end{aligned}$$

onde I_n é a matriz identidade.

III. Consideramos como base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ a sequência $\mathscr{B} = (x^2, x, 1)$.

Usando a base $\mathscr{B} = (x^2, x, 1)$, tem-se

$$T\left(x^2\right) = x^2 + x + 1, \quad T(x) = x \quad \text{e} \quad T(1) = x^2 + 1.$$

A matriz A que representa T nas bases indicadas, é a matriz que tem por *colunas* as imagens dos vetores da base do espaço de partida, ou seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

O núcleo de T corresponde aos polinómios $p \in \mathbb{R}_2[x]$ tais $T(p) = 0$, ou seja $T(ax^2+bx+c) = (a+c)x^2+(a+b)x+a+c = 0 \iff a+c = 0$ e $a+b = 0$, ou seja $a = -b = -c$ o que corresponde aos polinómios $ax^2 - ax - a = a(x^2 - x - 1)$, que têm por base o polinómio $p(x) = x^2 - x - 1$, e portanto o núcleo tem dimensão 1.

Na base $\mathscr{B}$ corresponde a $(1, -1, -1)$.

Os valores próprios de A são as soluções de $\det(A-\lambda I_3)=0$ ou seja

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(1-\lambda)((1-\lambda)^2-1)=(1-\lambda)(1-\lambda-1)(1-\lambda+1)$$

$=-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$, onde usamos a Regra de Laplace na segunda coluna, e a identidade $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, com $a=1-\lambda, b=1$.

As soluções de $-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)=0$ são $\lambda=0, \lambda=1$ e $\lambda=2$.

A matriz A é diagonalizável pois A é uma matriz 3×3 e tem 3 valores próprios distintos.

O espaço próprio associado ao valor próprio 0 corresponde ao núcleo de T, ou seja é gerado pelo vetor próprio $(1,-1,-1)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 1 corresponde às soluções não nulas de $(A-I_3)u=0$, ou seja às soluções não nulas de

$$\begin{bmatrix}1-1 & 0 & 1\\ 1 & 1-1 & 0\\ 1 & 0 & 1-1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z\\x\\x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

que tem por solução $x=z=0$, e portanto uma base para o espaço próprio associado ao valor próprio 1 é $(0,1,0)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio $\lambda=2$ corresponde às soluções não nulas de $(A-2I_3)u=0$, ou seja às soluções não nulas de

$$\begin{bmatrix}1-2 & 0 & 1\\ 1 & 1-2 & 0\\ 1 & 0 & 1-2\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&-1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-x+z\\x-y\\x-z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},$$

que tem por solução $x=y=z$, e portanto uma base para o espaço próprio associado ao valor próprio 2 é $(1,1,1)$.

IV. Como $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível, os seus valores próprios são diferentes de zero e tem-se

$$Au=\lambda u \implies A^{-1}Au=A^{-1}(\lambda u) \implies u=\lambda A^{-1}u \implies A^{-1}u=\frac{1}{\lambda}u.$$

Para matrizes invertíveis a matriz inversa de A pode ser obtida á custa da matriz adjunta de A, tendo-se a relação

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A),$$

e portanto

$$\operatorname{adj}(A)\,u = (\det A)\,A^{-1}u = (\det A)\,\frac{1}{\lambda}\,u = \frac{\det A}{\lambda}\,u.$$

Concluimos portanto que u também é vetor próprio da matriz adjunta, e que o valor próprio associado a u é $\frac{\det A}{\lambda}$.

FIM