U.C. 21037
Elementos de Probabilidades e Estatística

26 de junho de 2013

Critérios de avaliação:

- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efectuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas (por exemplo, probabilidades ou frequências relativas de valor superior a 1).

Correcção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correcta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (**Exame**: 6.50 valores; **P-fólio**: 6.0 valores)

1.1. (**Exame**: 2.0 valores; **P-fólio**: 2.50 valores)
A primeira linha do Quadro I fica preenchida se se notar que $N_0 = n_0 = 40$ e que, por definição de frequência relativa, $f_0 = \frac{n_0}{N}$, $N = 200$ (número total de dias observados).
Assim,

$$n_1 = N_1 - N_0 = 50 \implies f_1 = \frac{n_1}{200} = 0.25,$$

com o que fica completa a segunda linha.

Para a terceira linha, note-se que

$$n_2 = 200 f_2 = 60 \implies N_2 = n_2 + N_1 = 150.$$

Como $N_4 = N = 200$ e, também, $N_4 = N_3 + n_4$, resulta que $N_3 = 180$. Assim,

$$n_3 = N_3 - N_2 = 30 \implies f_3 = \frac{n_3}{N} = 0.15.$$

Para completar o Quadro I falta só o valor $f_4 = \frac{n_4}{200} = 0.1$. O Quadro I fica assim completo:

Nº de intervenções	n_i	N_i	f_i
0	**40**	40	0.2
1	50	**90**	0.25
2	60	150	**0.30**
3	30	180	0.15
4	**20**	200	0.1

1.2. (**Exame**: 1.0 valor; **P-fólio**: 1.50 valores)

De acordo com o Quadro I, em $50(= n_1)$ dias (dos 200 em análise) o bloco foi utilizado para uma intervenção cirúrgica, em $60(= n_2)$ dias o bloco foi utilizado para duas intervenções e em $30(= n_3)$ dias (dos 200 em análise) o bloco foi utilizado para três intervenções cirúrgicas. Ou seja, há um total de $50 + 60 + 30 = 140$ dias em que o bloco foi utilizado para uma, duas, ou três intervenções.

1.3. (**Exame**: 1.0 valor)

O Quadro I indica que em $20\% = f_0$ dos dias o bloco não foi utilizado e que em $25\% = f_1$ dos dias o bloco foi utilizado para apenas uma intervenção cirúrgica. Assim, a percentagem de dias em que o bloco foi utilizado no máximo uma vez é de 20%+25%=45%.

1.4. (**Exame**: 2.50 valores; **P-fólio**: 2.0 valores)

Observando a coluna das frequências absolutas n_i do Quadro I, verifica-se que o maior valor é $60 = n_2$. Deste modo, a moda do número de intervenções cirúrgicas realizadas é 2.

Para o cálculo da mediana comece-se por observar que o número de dias observados, 200, é um número par. Ordenando os 200 dados por ordem crescente de número de utilizações do bloco por dia (não é necessário fazê-lo explicitamente) os dois elementos médios da colecção de dados correspondem aos dados com as ordens 100 e 101. (Estas ordens podem ser obtidas pelos cálculos $\frac{200}{2}$ e $\frac{200}{2}+1$.) Consultando a terceira coluna do Quadro I, verifica-se que $N_1 = 90$ (inferior a 101 e a 100) e que $N_2 = 150$. Assim, os elementos de ordem 100 e 101 correspondem ambos a duas intervenções cirúrgicas realizadas por dia no bloco. A mediana é então igual ao valor da semi-soma $(2 + 2)/2 = 2$.

O valor da média é dado pelo quociente

$$\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{4} i\, n_i}{N} = \frac{0 \times 40 + 1 \times 50 + 2 \times 60 + 3 \times 30 + 4 \times 20}{200} = 1.7.$$

2. (**Exame**: 3.0 valores)

2.1. (**Exame**: 1.50 valores)

Num baralho usual existem 13 possíveis valores e a cada valor estão associadas **precisamente** quatro cartas. Deste modo, fixado um valor, só há uma forma para se fixar 4 cartas desse valor.

As restantes 9 cartas serão necessariamente de valores diferentes do anteriormente fixado, existindo

$$\binom{52-4}{9}$$

maneiras diferentes para se escolher as restantes 9 cartas.

Assim, existem

$$13\binom{48}{9}$$

diferentes maneiras para se retirar de um baralho um conjunto de 13 cartas das quais quatro são do mesmo valor.

2.2. (**Exame**: 1.5 valores)

Num baralho de 52 cartas há 4 naipes diferentes. Escolhido um, há 13 valores possíveis, pelo que existem

$$\binom{13}{5}$$

maneiras diferentes para se escolher 5 cartas do naipe escolhido. As restantes $13-5$ cartas terão então de ser escolhidas entre as restantes cartas do baralho com naipes diferentes do anteriormente fixado ($52-13$ cartas). Para o fazer, há

$$\binom{52-13}{13-5}$$

diferentes maneiras.

Como num baralho existem $\binom{52}{13}$ maneiras diferentes para se escolher um conjunto de 13 cartas, conclui-se assim que a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{4\binom{13}{5}\binom{39}{8}}{\binom{52}{13}}.$$

3. (**Exame**: 4.50 valores)

3.1. (**Exame**: 1.50 valores)

Note-se que $k = F(2)$ em que, por definição de função de distribuição,

$$F(2) = P(X \leq 2) = 1 - P(X > 2) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

Logo, $k = 0.7$.

3.2. (**Exame**: 1.0 valor)

Tem-se

- $P(X \leq 2.5) = F(2.5) = k = 0.7$;
- $P(2X > 3) = P(X > 1.5) = 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - F(1.5) = 1 - 0.5 = 0.5$.

3.3. (**Exame**: 2.0 valores)

Como a variável aleatória X tem valores em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, a função de probabilidade terá domínio igual a $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observe-se, ainda, que por X ter valores em $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $P(X = 0) = P(X \leq 0)$. Assim,

$$f(0) := P(X = 0) = P(X \leq 0) = F(0) = 0.2.$$

Para os restantes valores tem-se

$$\begin{aligned} f(1) := P(X = 1) &= P(X \in \,]0, 1]) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0) \\ &= F(1) - F(0) = 0.5 - 0.2 = 0.3 \end{aligned}$$

e, de modo semelhante,

$$\begin{aligned} &f(2) = F(2) - F(1) = k - 0.5 = 0.2, \\ &f(3) = F(3) - F(2) = 1 - k = 0.3, \\ &f(n) = F(n) - F(n-1) = 1 - 1 = 0, \quad n \geq 4. \end{aligned}$$

Deste modo, tem-se

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.2	0.3

e para todos os restantes números naturais $x \geq 4$, $f(x) = 0$.

4. (**Exame**: 1.50 valores)

Tratando-se da distribuição de Poisson, tem-se

$$P(X = n + 1) = \frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{(n+1)!} \lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^n}{(n+1)!} P(X = 1).$$

5. (**Exame**: 4.50 valores; **P-fólio**: 6.0 valores[1])

5.1. (**Exame/P-fólio**: 2.0 valores)

Seja X a variável aleatória definida pelo comprimento dos parafusos em centímetros. De acordo com o enunciado, tem-se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 5$, $\sigma = 0.2$. Pretende-se calcular $P(X \notin (4.8, 5.2)) = 1 - P(4.8 < X < 5.2)$.

Para este efeito considere-se a variável aleatória

$$Z = \frac{X - 5}{0.2} \sim N(0, 1).$$

[1] Grupo 2 do P-fólio.

Tem-se

$$\begin{aligned} P(4.8 < X < 5.2) &= P\left(\frac{4.8-5}{0.2} < \frac{X-5}{0.2} < \frac{5.2-5}{0.2}\right) \\ &= P(-1 < Z < 1) \end{aligned}$$

pelo que

$$P(X \notin (4.8, 5.2)) = 1 - P(-1 < Z < 1) = P(Z \leq -1) + P(Z \geq 1).$$

Sendo a lei $Z \sim N(0,1)$ simétrica em relação a 0, isto é,

$$P(Z \leq -x) = P(Z \geq x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

resulta, para $x = 1$, que $P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1)$.
Deste modo,

$$P(X \notin (4.8, 5.2)) = P(Z \leq -1) + P(Z \geq 1) = 2(1 - P(Z \leq 1)) = 2(1 - \Phi(1)),$$

para Φ a função de distribuição da normal reduzida. De acordo com a tabela anexa ao enunciado da prova, $\Phi(1) = 0.841$, pelo que $P(X \notin (4.8, 5.2)) = 2(1 - 0.841) = 0.318$.

5.2. (**Exame**: 1.0 valor; **P-fólio**: 2.0 valores)
Como se viu na alínea anterior,

$$P(X \leq 4.8) = P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1) = P(X \geq 5.2),$$

o que prova que a taxa de rejeição dos parafusos com mais de 5.2 cm é igual à taxa de rejeição dos parafusos com menos de 4.8 cm.

5.3. (**Exame**: 1.50 valores; **P-fólio**: 2.0 valores)
Seja Y a variável aleatória que designa o número de parafusos defeituosos. Como os parafusos são **independentes entre si** e, em particular, o seu comprimento, a variável aleatória Y segue uma distribuição binomial com $n = 10$ e $p = P(X \in (4.8, 5.2)) = 1 - 0.318 = 0.682$ (cf. alínea 5.1). Logo,

$$P(Y = 0) = p^{10}(1-p)^0 = p^{10} = 0.021769264.$$