Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 2 a 10 de Maio de 2020

Data de Limite de Entrega

10 de Maio de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Filas de espera e gestão de projectos

Competências

Identificar e aplicar Sistemas de Filas de Espera ao abordar problemas práticos específicos.
Aplicar o Método do Caminho Crítico na Gestão de redes de Projetos.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores distribuídos de acordo com o enunciado.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **nove** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Patrícia Engrácia e Elsa Negas

Enunciado

1. Considere um projecto com as actividades A, B, C, D, E, F, G, H , I, J e K. Na tabela seguinte apresentam-se as precedências e a duração (em dias) de cada um das actividades.

Actividades	Precedências	Duração (dias)
A	—	9
B	—	5
C	A	6
D	A	3
E	A, B	13
F	A, B	13
G	E, F	6
H	D, E, F	1
I	F	3
J	C, D, E, F	2
K	G, H, I, J	5

a) (0.5 val.) Desenhe a rede do projecto.

b) (0.5 val.) Indique a duração do projecto. Qual o caminho crítico? Justifique.

c) (0.5 val.) A actividade C é executada por uma máquina que, devido a uma avaria, só pode começar a funcionar 12 dias depois de iniciado o projecto. Que consequência teve para o projecto? E se a avaria se verificasse na máquina que executa a actividade E, que consequências haveria para o projecto?

d) (0.5 val.) Admita que é possível reduzir o tempo de execução das actividades de acordo com a seguinte tabela.

Actividades	ΔT (u. tempo)	ΔC (u.m.)
A	4	52
B	3	9
C	—	—
D	—	—
E	5	5
F	3	10
G	5	22,5
H	—	—
I	—	—
J	1	12
K	2	10

Observação: O valor da coluna ΔC corresponde ao custo total da redução ΔT. É possível reduzir apenas parte de ΔT com o custo proporcional à parte reduzida.

Que reduções devem ser implementadas para que a duração total do projecto seja reduzida em 10% e o incremento no custo total do projecto seja mínimo? Qual é o incremento no custo total do projecto?

2. Uma empresa de decoração de interiores abre no próximo mês de setembro na zona do Chiado. A empresa pretende contratar um número de arquitectos de interiores superior a 1 de forma a que nenhum cliente espere mais de 10 minutos por atendimento personalizado. A taxa média de chegadas é de 1 cliente de 15 em 15 minutos, segundo a distribuição Poisson. A duração de cada atendimento é de 30 minutos, segundo a distribuição Exponencial negativa.

a) (0.2 val.) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado.

b) (1.0 val.) Determine o número mínimo de arquitectos de interiores que devem ser contratados para que o tempo médio de espera de cada cliente seja inferior a 10 minutos.

Para as restantes questões assuma o número de servidores determinado na alínea b).

c) (0.2 val.) Qual o tempo, em média, que cada cliente passa na loja?

d) (0.3 val.) Qual a probabilidade de estarem dois cliente à espera de atendimento personalizado?

e) (0.3 val.) Qual a probabilidade de um cliente esperar no máximo 5 minutos para ser atendido? E mais de 10 minutos?

FIM

Resolução:

1.a)

i)

Sistema **M/M/1/K**, população = ∞; Fila máxima = 4 (K-1), com K=5 (sendo K, o número máximo de clientes no sistema), pois:

- Processo de chegada dos clientes ao serviço é Poissoniano

- Duração do atendimento segue uma distribuição exponencial negativa

- Existe um único servidor

- O serviço admite no máximo 5 clientes (K=5)

- A população de potenciais clientes é ilimitada

- A disciplina da fila de espera é FIFO, ou seja, os clientes são atendidos por ordem de chegada

ii)

Para calcular o número de clientes por hora impedidos de entrar, teremos de encontrar a diferença entre a taxa média de chegada de potenciais clientes e a taxa média real de clientes.

Tendo em conta que o processo de chegada de clientes tem uma taxa média de chegada a cada 10 minutos, o que significa que chega 1 cliente a cada 10 minutos, ou seja, 6 clientes por hora: $\boldsymbol{\lambda} = \frac{6}{60} min^{-1} = \frac{1}{10} min^{-1}$

Como a duração do atendimento segue uma distribuição exponencial negativa, com valor médio igual a 8 minutos, temos: $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{8} min^{-1}$

Assim sendo, podemos calcular a taxa de pressão: $\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\mu}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{8}} = \frac{4}{5}$

Visto que, a taxa média de clientes perdidos é: $\lambda - \overline{\lambda}$

Para obter o valor de $\overline{\lambda}$ precisamos de calcular a probabilidade de o sistema estar vazio (P_0) e a probabilidade de o sistema estar cheio (P_5).

Taxa de desocupação: $\mathbf{1} - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \boldsymbol{P_0} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{W_q} = \mathbf{0}) = \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{1}-\boldsymbol{\rho}^{k+1}}$

$$P_0 = \frac{1-\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^6} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{4096}{15625}} = \frac{3125}{11529}$$

$P_0 \approx 0{,}2710 = 27{,}10\%$

$$\boldsymbol{P_n} = \begin{cases} \boldsymbol{\rho^n P_0};\ \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{1} \wedge \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{K} \\ \dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{K}+\mathbf{1}};\ \boldsymbol{\rho} = \mathbf{1} \wedge \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{K} \\ \mathbf{0};\boldsymbol{n} > \boldsymbol{K} \end{cases}$$

Para $n = 5;\ K = 5\ e\ \rho = \frac{4}{5}$, então teremos o caso:

$\boldsymbol{P_n} = \boldsymbol{\rho^n P_0};\ \boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{1} \wedge \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{K}$

$$P_5 = \left(\frac{4}{5}\right)^5 . 0{,}2710 = \frac{1024}{3125} . 0{,}2710$$

$P_5 \approx 0{,}8888 = 8{,}88\%$

Podemos então calcular a taxa média real de entradas no sistema $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_5)$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{10}(1 - 0{,}8888) = \frac{1}{10} . 0{,}9112 = \frac{1139}{12500} = 0{,}09112$$

Vamos então calcular $\lambda - \bar{\lambda}$, ou seja, a nossa taxa média de clientes perdidos:

$$\left(\frac{1}{10} - 0{,}09112\right) min^{-1} = \left(\frac{111}{12500}\right) min^{-1} = 0{,}00888 min^{-1} = 0{,}00888 x 60 h \mathrm{min}^{-1} = 0{,}5328 \mathrm{h}^{-1}$$

O número médio de clientes impedidos de entrar por hora, é de 0,5328.

iii)

Comprimento médio da fila de espera: $\boldsymbol{L_q = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}}$

Precisamos então de calcular o número médio de clientes no sistema, ou seja, L:

$$\boldsymbol{L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(k+1).\rho^{k+1}}{1-\rho^{k+1}}} \, para\ \rho \neq 1$$

$$L = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}} - \frac{(5+1).\left(\frac{4}{5}\right)^{5+1}}{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{5+1}} = 4 - \frac{8192}{3843} \approx 1{,}8683$$

Vamos então calcular $\boldsymbol{L_q = L - \frac{\bar{\lambda}}{\mu}}$

$$L_q = 1{,}8683 - \frac{0{,}09112}{\frac{1}{8}} = 1{,}13934$$

O comprimento médio da fila de espera é de 1,1394 clientes.

iv)

Tempo médio de permanência de um cliente no sistema: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$

Tempo médio de permanência na fila de espera: $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}$

Vamos então calcular:

$$W = \frac{1{,}8683}{0{,}09112} = \frac{5495}{268} \approx 20{,}5037$$

$$W_q = \frac{1{,}13934}{0{,}09112} = \frac{3351}{268} \approx 12{,}5037$$

Temos então que o tempo médio de permanência de um cliente no sistema é de 20,5037 minutos e o tempo médio de permanência na fila de espera é de 12,5037 minutos.

1.b)

$\boldsymbol{SS \leq K;\ N^{o}\ M\acute{a}ximo\ de\ clientes\ no\ sistema\ =\ K = 5;\ N^{o}\ de\ servidores\ =\ S = 2}$

Neste cenário, o tipo de sistema de fila de espera associado muda, passando a estarmos perante um sistema M/M/S/K, população = ∞; Fila máxima = K-S=5-2=3, com S=2 e K=5.

A disciplina da fila, mantem-se FIFO, ou seja, por ordem de chegada.

O número de entradas de clientes no sistema será dependente do estado *n* no sistema, ou seja, do número *n* de clientes no sistema:

$$\boldsymbol{\lambda_n} \begin{cases} \boldsymbol{\lambda;\ n = 0, 1, .., K - 1} \\ \boldsymbol{0;\ n > K} \end{cases} \quad \boldsymbol{;} \qquad \boldsymbol{\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_k)}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{6}{60} min^{-1} = \frac{1}{10} min^{-1}$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{8} min^{-1}$$

Taxa de ocupação: $\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{\frac{1}{10}}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{2}{5}$

Taxa média de clientes perdidos: $\lambda - \bar{\lambda}$

$$\boldsymbol{P_0} = \begin{cases} \left[\dfrac{\boldsymbol{S^S \rho^{S+1}(1 - \rho^{K-S})}}{\boldsymbol{S!\,(1 - \rho)}} + \displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{S}} \dfrac{\boldsymbol{(S\rho)^n}}{\boldsymbol{n!}} \right]^{\boldsymbol{-1}} & \boldsymbol{;\rho \neq 1} \\ \left[\dfrac{\boldsymbol{S^S}}{\boldsymbol{S!}} \boldsymbol{(K - S)} + \displaystyle\sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{S}} \dfrac{\boldsymbol{S^n}}{\boldsymbol{n!}} \right]^{\boldsymbol{-1}} & \boldsymbol{;\rho = 1} \end{cases}$$

Como o nosso $\boldsymbol{\rho = \frac{2}{5}, logo\ \rho \neq 1}$ então iremos usar o ramo superior.

$$P_0 = \left[\frac{\boldsymbol{S^S \rho^{S+1}(1 - \rho^{K-S})}}{\boldsymbol{S!\,(1 - \rho)}} + \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{S}} \frac{\boldsymbol{(S\rho)^n}}{\boldsymbol{n!}} \right]^{-1} = \left[\frac{\boldsymbol{2^2 \left(\frac{2}{5}\right)^{2+1} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{5-2}\right)}}{\boldsymbol{2!\,(1 - \frac{2}{5})}} + \sum_{\boldsymbol{n=0}}^{\boldsymbol{2}} \frac{\boldsymbol{2.\left(\frac{2}{5}\right)}}{\boldsymbol{n!}} \right]^{\boldsymbol{-1}}$$

$$= \left[\frac{\frac{3744}{15625}}{\frac{6}{5}} + \frac{53}{25} \right]^{-1} = \left[\frac{624}{3125} + \frac{53}{25} \right]^{-1} = \left[\frac{7249}{3125} \right]^{-1} = \frac{3125}{7249} \approx 0{,}4310 = 43{,}10\%$$

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{(S\rho)^n}{n!'}.P_0;\ n = 1,\dots,S \\ \dfrac{S^S.\rho^n}{S!}P_0;\ n = S+1\dots,K \\ \quad 0; n \geq K+1 \end{cases}$$

No nosso caso aplica-se o 2º ramo.

$$P_5 = \frac{S^S.\rho^n}{S!}P_0 = \frac{2^2.\left(\frac{2}{5}\right)^5}{2!}.0{,}4310 \approx 0{,}0088 = 0{,}88\%$$

Podemos então calcular a taxa média real de entradas no sistema $\bar{\lambda} = \lambda(1 - P_5)$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{10}(1 - 0{,}0088) = \frac{1}{10}.\frac{1239}{1250} = \frac{1239}{12500} = 0{,}09912$$

Vamos então calcular $\lambda - \bar{\lambda}$, ou seja, a nossa taxa média de clientes perdidos:

$$\left(\frac{1}{10} - 0{,}09912\right)min^{-1} = 0{,}00089min^{-1} = 0{,}00089x60min^{-1} = 0{,}0534\text{h}^{-1}$$

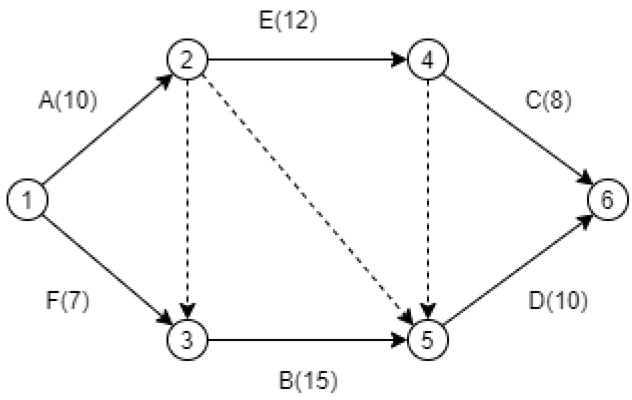
Comprimento médio da fila de espera: $L_q = \frac{S^S.\rho^{S+1}P_0}{S!(1-\rho)^2}.[1 - \rho^{K-S} - (1-\rho)(K-S).\rho^{K-S}]$

$$L_q = \frac{2^2.\left(\frac{2}{5}\right)^{2+1}.0{,}4310}{2!\,(1-\frac{2}{5})^2}.\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{5-2} - \left(1 - \frac{2}{5}\right)(5-2)\left(\frac{2}{5}\right)^{5-2}\right] = \frac{862}{5625}.\frac{513}{625} \approx 0{,}1257$$

Assim, o número médio de clientes impedidos de entrar por hora, é de 0,0534 e o comprimento médio da fila de espera é de 0,1257 clientes.

2.

a) A rede que representa o projecto é dada abaixo, onde os nós foram, numerados de 1 a 6 (com 1 o nó inicial e 6 o nó terminal).



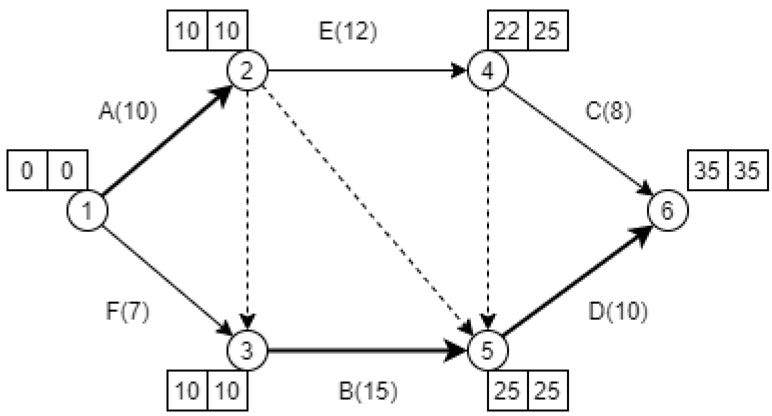
1.0

Tendo em conta que ambas as actividades A e F divergem do nó inicial 1, terá de existir uma actividade fictícia entre os nós 2 e 3, que é suficiente para assegurar as precedências por A e F.

De forma a também assegurar as precedências de A, B e E, foi necessário criar uma actividade fictícia entre os nós 2 e 5, e entre os nós 4 e 5.

ñ é necessária, pois B já depende de A.

b)



A duração do projecto é o máximo da duração dos caminhos possíveis. Assim:

Caminho	Duração	Duração Total
A, B, D	10 + 15 + 10	**35**
A, E, C	10 + 12 + 8	30

A duração do projecto é de 35 dias.

O caminho critico é o mais longo caminho ou sequência de actividades (em termos de duração das actividades) ao longo do diagrama de rede.

Para o calcular, vamos então utilizar o Método do Caminho Critico (M. C. C), que assume durações determinísticas para as actividades do projecto. Assim, com base na rede de projecto, e com base nas durações determinísticas das actividades, calculou-se os tempos mais cedo (EST) e os tempos mais tarde de cada nó (LST), para assim identificar as actividades críticas, que globalmente foram o caminho critico.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 0 + 10 = 10$
$tm_3 = MAX\ (tm_1 + 7,\ tm_2) = MAX\ (7,\ 10) = 10$
$tm_4 = tm_2 + 12 = 10 + 12 = 22$
$tm_5 = MAX\ (tm_3 + 15,\ tm_2,\ tm_4) = MAX\ (25,\ 10,\ 22) = 25$
$tm_6 = MAX\ (tm_5 + 10,\ tm_4 + 8) = MAX\ (35,\ 30) = 35$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_6 = 35$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 – 10 = 35 – 10 = 25$
$TM_4 = MIN\ (TM_5,\ TM_6 – 8) = MIN\ (25,\ 27) = 25$
$TM_3 = TM_5 – 15 = 25 – 15 = 10$
$TM_2 = MIN\ (TM_3,\ TM_5,\ TM_4 – 12) = MIN\ (10,\ 25,\ 13) = 10$
$TM_1 = MIN\ (TM_2 – 10,\ TM_3 – 7) = MIN\ (0,\ 3) = 0$

Apesar de todos os nós da rede, com excepção do 4 serem críticos (tempos mais cedo são iguais aos tempos mais tarde), tal não significa que todas as atividades sejam críticas. Para o efeito, a duração da atividade tem de ser igual à diferença entre os tempos do nó de destino e de origem. Caso contrário, a actividade diz-se folgada.

Analisemos então, quais as actividades críticas da rede. A actividade E foi excluida, por não anteceder nenhum nó critico.

10 = dur(A) = t2 – t1 = 10 – 0 = 10
15 = dur(B) = t5 – t3 = 25 – 10 = 15
8 = dur(C) ≠ t6 – t4 = 35 – 25 = 10
10 = dur(D) = t6 – t5 = 35 – 25 = 10
7 = dur(F) ≠ t2 – t1 = 10 – 0 = 10

Uma vez que todos os nós, excepto o 4, são críticos, podemos representar os tempos mais cedo e mais tarde pela mesma variável já que são iguais. Deste modo, utilizou-se a notação genérica para designar o tempo (mais cedo ou mais tarde) associado ao nó crítico i, i=1, …, 6. De acordo com os cálculos acima, concluímos então que A, B e D são as atividades críticas, formando o caminho crítico do empreendimento, com uma duração total de:
Dur(A)+Dur(B)+Dur(D)= 10+15+10 = 35 dias, como já tinha sido referido anteriormente.

1.0