Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 29 de março a 4 de abril de 2022

Data de Limite de Entrega

4 de abril de 2022, até às 23h59 de Portugal Continental

Temas

Tópico 1 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,0 valores
2. 0,8 valores
3. 0,4 valores
4. 0,8 valores

Total: 3,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-|x|}$.

a) Sendo $\mathcal{P}_n$ uma decomposição de $[-1, 1]$ constituída por um número n de pontos equidistantes, calcule as somas superior e inferior de Darboux, $S_{\mathcal{P}_n}(f)$ e $s_{\mathcal{P}_n}(f)$ respetivamente.

b) Recorrendo à alínea anterior, mostre que f é integrável à Riemann em $[-1, 1]$ e calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} f$.

2. Considere a função $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\sin(1/x)) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

onde sgn é a chamada "função sinal", definida por

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u > 0 \\ 0 & \text{se } u = 0 \\ -1 & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

a) Mostre que o conjunto de pontos de descontinuidade de φ é numerável.

b) Prove que φ é integrável à Riemann[1] em $[0, 1]$.

c) Conclua que[2] $\int_0^1 \varphi(x)dx > 0$.

3. Seja Ω o subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ delimitado pelas linhas de equação $y = x$, $y = 2 - x$, $y = x^2$ e $y = (x - 2)^2$. Esboce Ω e, recorrendo a métodos do cálculo integral, determine a sua área.

4. Seja ψ o prolongamento por continuidade ao ponto $x = 0$ da função que, para $x \neq 0$, é dada por $\frac{\arctan x}{x}$. Recorrendo aos desenvolvimentos em série de McLaurin que deve conhecer de cor[3] e usando os teoremas apropriados (que deve indicar explicitamente quais são), determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função ψ e da série de Taylor de ψ no ponto 1. Indique explicitamente qual os respetivos domínios de convergência absoluta. Aproveite os resultados obtidos para determinar os valores de $\psi^{(35)}(0)$ e de $\psi^{(35)}(1)$, onde $\psi^{(k)}$ representa a derivada de ψ de ordem k.

FIM

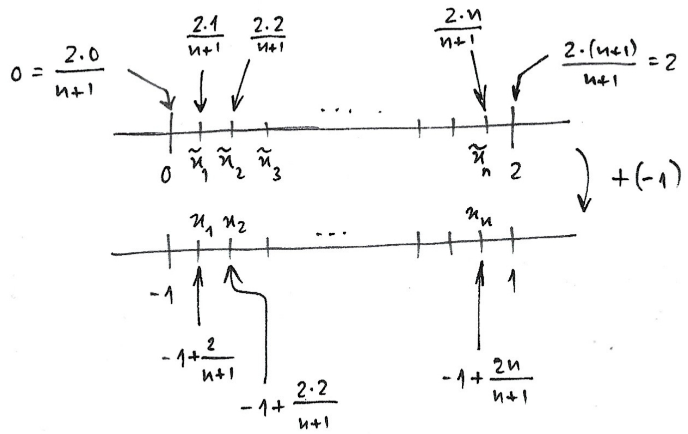
[1] Sugestão: recorra à caracterização das funções integráveis à Riemann estabelecida por Henri Lebesgue. Cf. Campos Ferreira: *Introdução à Análise Matemática*, 1ª Ed., Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1987; pp. 532–533.

[2] Sugestão: NÃO tente calcular explicitamente o valor do integral! Poderá ser útil tentar esboçar o gráfico de φ.

[3] As séries de McLaurin que *devem* ser conhecidas de cor são as séries das funções e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\frac{1}{1-x}$, bem como os respetivos domínios de convergência absoluta.

RESOLUÇÃO

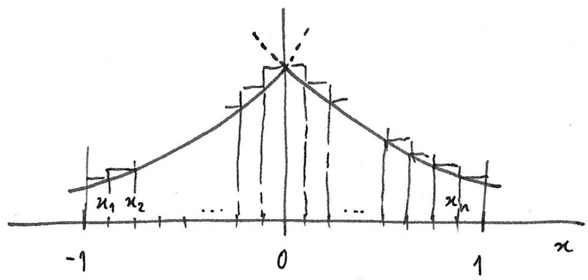
1.a) Considere-se n ímpar. Sendo a decomposição equidistante e tendo o intervalo comprimento igual a 2, cada sub-intervalo determinado pela decomposição terá comprimento igual a $\frac{1}{(n+1)/2}$, ou seja, a decomposição será, como se ilustra na figura seguinte



Portanrto

$$\mathcal{P}_n = \left\{-1 + \frac{2}{n+1}, -1 + \frac{4}{n+1}, \ldots, 0, \ldots, -1 + \frac{2n}{n+1}\right\}.$$

Para calcular as somas de Darboux é importante constatar que a função dada é crescente em $\mathbb{R}^-$ e decrescente em $\mathbb{R}^+$, pelo, em cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ determinado pela decomposição $\mathcal{P}_n$ o seu máximo é atingido em x_{i+1} quando se está em $\mathbb{R}^-$ e em x_i quando em $\mathbb{R}^+$, e reciprocamente para o mínimo. Na figura seguinte ilustra-se esquematicamente os retângulos cuja área é dada pela soma superior de Darboux:



Então, definindo $x_i = -1 + \frac{2i}{n+1}$ se $i \in \{1, \ldots, n\}$, e ainda $x_0 = -1$ e $x_{n+1} = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
S_{\mathcal{P}_n}(f) &= \sum_{i=0}^{n} \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} e^{-|x|}(x_{i+1}-x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} e^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=(n+1)/2}^{n} e^{-x_i}(x_{i+1}-x_i) \\
&= \frac{2e^{-\frac{n-1}{n+1}}}{n+1} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \left(e^{\frac{2}{n+1}}\right)^i + \frac{2e}{n+1} \sum_{i=(n+1)/2}^{n} \left(e^{-\frac{2}{n+1}}\right)^i \\
&= \frac{2}{n+1} \frac{1-e^{-\frac{n-1}{n+1}}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1} + \frac{2}{n+1} \frac{e^{\frac{2}{n+1}}\left(1-e^{-\frac{n-1}{n+1}}\right)}{e^{\frac{2}{n+1}}-1} \\
&= \frac{1}{\frac{e^{\frac{2}{n+1}}-1}{\frac{2}{n+1}}} \left(1-e^{-\frac{n-1}{n+1}}\right)\left(1+e^{\frac{2}{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_{\mathcal{P}_n}(f) &= \sum_{i=0}^{n} \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} e^{-|x|}(x_{i+1}-x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{(n-1)/2} e^{x_i}(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=(n+1)/2}^{n} e^{-x_{i+1}}(x_{i+1}-x_i) \\
&= \frac{2e^{-1}}{n+1} \sum_{i=0}^{(n-1)/2} \left(e^{\frac{2}{n+1}}\right)^i + \frac{2e^{\frac{n-1}{n+1}}}{n+1} \sum_{i=(n+1)/2}^{n} \left(e^{-\frac{2}{n+1}}\right)^i \\
&= \frac{2}{n+1} e^{-1} \frac{e^{\frac{n-1}{n+1}}-1}{e^{\frac{2}{n+1}}-1} + \frac{2}{n+1} \frac{1-e^{-\frac{n-1}{n+1}}}{e^{\frac{2}{n+1}}-1} \\
&= \frac{1}{\frac{e^{\frac{2}{n+1}}-1}{\frac{2}{n+1}}} \left(e^{-\frac{2}{n+1}} - e^{-1} + 1 - e^{-\frac{n-1}{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

1.b) Comece-se por observar que, usando a regra de Cauchy para o levantamento de indeterminações, tem-se

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = \lim_{t\to 0} e^t = 1,$$

pelo que o primeiro termo multiplicativo das expressões de $S_{\mathcal{P}_n}(f)$ e $s_{\mathcal{P}_n}(f)$ converge para 1 quando $n \to \infty$. Como é evidente que, quando $n \to \infty$,

$$\left(1-e^{-\frac{n-1}{n+1}}\right)\left(1+e^{\frac{2}{n+1}}\right) \to 2(1-e^{-1})$$

e

$$e^{-\frac{2}{n+1}} - e^{-1} + 1 - e^{-\frac{n-1}{n+1}} \to 2(1 - e^{-1})$$

concluímos que $S_{\mathcal{P}_n}(f) - s_{\mathcal{P}_n}(f) \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto, usando o teorema que afirma que f é integrável sempre que, para $\delta > 0$ arbitrário, existir uma decomposição do intervalo para a qual $S_{\mathcal{P}_n}(f) - s_{\mathcal{P}_n}(f) < \delta$, podemos concluir que a função f dada é integrável em $[-1, 1]$.

Tendo concluído que $f(x) = e^{-|x|}$ é integrável em $[-1, 1]$ podemos escrever, usando a expressão da alínea anterior,

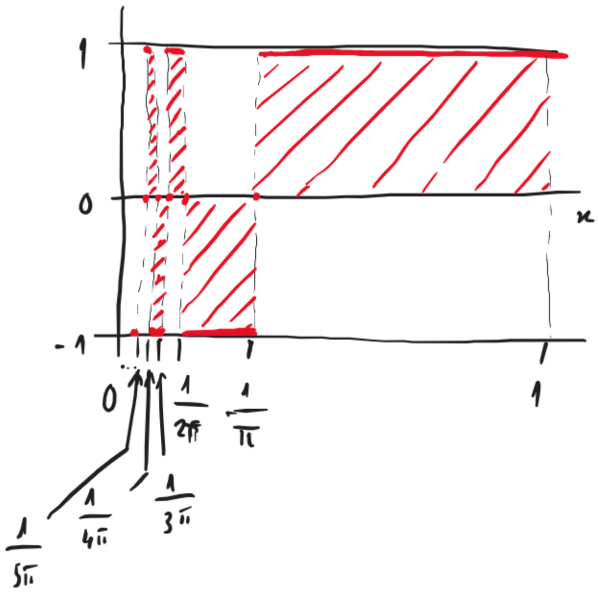
$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx = \inf_{\mathcal{P}_n} S_{\mathcal{P}_n}(e^{-|x|}) = \lim_{n\to\infty} S_{\mathcal{P}_n}(e^{-|x|}) = 2(1 - e^{-1}).$$

2.a) Atendendo a que a função seno é contínua em toda a reta real e o único ponto de descontinuidade da função sgn é na origem, concluímos que os pontos de descontinuidade de φ ocorrem nos pontos x do intervalo $[0, 1]$ para os quais $\sin \frac{1}{x} = 0$ e, eventualmente, também quando $x = 0$. Os primeiros são os pontos $\frac{1}{x} = k\pi$, com $k \in \mathbb{N}$, ou seja $x = x_k := \frac{1}{k\pi}$ com $k \in \mathbb{N}$. Estes constituem, naturalmente, um conjunto numerável, o que responde à questão colocada[4].

2.b) Seguindo a sugestão do enunciado e tendo já concluído na alínea anterior que os pontos de descontinuidade de φ constituem um conjunto numerável, concluímos imediatamente (pela demonstração que vem na página 533 da referência indicada na sugestão) que ele tem medida de Lebesgue nula e, portanto, que a função φ é integrável à Riemann em $[0, 1]$.

2.c) Atendendo à interpretação geométrica do integral de uma função positiva como correspondendo à área da região delimitada pelo gráfico da função e o eixo dos xx e atendendo ao esboço do gráfico da função φ que se apresenta a seguir (a função alterna entre os valores $+1$ e -1 em intervalos cada vez mais pequenos que se vão acumular na origem, pelo que esta parte do gráfico é impossível representar com algum rigor e é apenas sugerida)

[4] Isto significa que o esclarecimento se $x = 0$ é, ou não, um ponto de descontinuidade de φ não influencia a resposta. Trata-se, de facto, também de um ponto de descontinuidade porque existem sucessões $v_k \to 0$ para as quais $\varphi(v_k) = 1, \forall k$, embora $\varphi(0) = 0 \neq 1$. Uma sucessão deste tipo é obtida considerando, por exemplo, $\sin \frac{1}{v_k} = 1$, ou seja $v_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$.

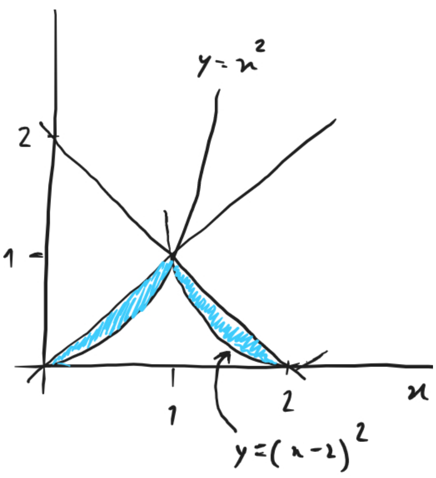


Consequentemente

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(x)dx &= \int_0^{1/\pi} \varphi(x)dx \; + \int_{1/\pi}^1 \varphi(x)dx \\
&= \int_0^{1/\pi} \varphi(x)dx \; + \int_{1/\pi}^1 1\, dx \\
&= \int_0^{1/\pi} \varphi(x)dx \; + 1 - \frac{1}{\pi} \\
&> \int_0^{1/\pi} (-1)dx + \; 1 - \frac{1}{\pi} \\
&= 1 - \frac{2}{\pi} \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

onde na primeira desigualdade usou-se os factos de que $\varphi(x) \geq -1$ e de que no intervalo $[0, 1/\pi]$ há subintervalos não degenerados em que $\varphi(x) = 1$, pelo que o integral no intervalo terá um valor superior ao da função identicamente igual a -1.

3. O conjunto Ω está esboçado na figura seguinte



É imediato concluir desta figura que Ω é simétrico para a reflexão[5] em $x = 1$, pelo que se tem

$$A(\Omega) = 2\int_0^1 (x - x^2)dx = 2\int_0^1 x\,dx - 2\int_0^1 x^2\,dx = 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. Recorrendo à regra de Cauchy tem-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1,$$

pelo que

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Para obter os desenvolvimentos em série de MacLaurin comecemos por recordar que as séries de potências são diferenciáveis e integráveis termo-a-termo on interior do seu intervalo de convergência (absoluta). Por outro lado sabemos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} s^n$ é absolutamente convergente em $]-1, 1[$ e a sua soma é igual a $\frac{1}{1-s}$.

[5]Esta conclusão sobre a simetria da região pode ser mais rigorosamente retirada do seguinte argumento algébrico, ele próprio sugerido também a partir do esboço: fazendo a mudança de variável $x \mapsto \tilde{x} := x - 1$ tem-se $x = 1 + \tilde{x}$ e as linhas $y = x$, $y = 2 - x$, $y = x^2$ e $y = (x-2)^2$ que delimitam a região Ω passam a ser descritas, respetivamente, pelas equações $y = 1 + \tilde{x}$, $y = 1 - \tilde{x}$, $y = (1 + \tilde{x})^2$ e $y = (1 - \tilde{x})^2$. Agora é imediato que este conjunto de equações é invariante para a transformação $\tilde{x} \mapsto -\tilde{x}$, o que significa que a região limitada por estas linhas é invariante para a simetria de reflexão relativamente à linha $\tilde{x} = 0$, ou seja, $x = 1$.

Tem-se, então,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \text{quando } x \in]-1,1[.$$

Portanto, integrando termo-a-termo e observando que $\arctan 0 = 0$ (o que permite fizar a constante de primitivação como 0), obtém-se

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{quando } x \in]-1,1[,$$

e então, se $x \neq 0$

$$\psi(x) = \frac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$$

e como a expressão do membro direito faz sentido mesmo quando $x = 0$ se assumirmos que x^0 é igual a 1 para todos os valores de x, podemos então concluir que esta expressão também é válida para o valor de $\psi(0)$, que, como vimos anteriormente, é 1. Assim, a série de MacLaurin pretendida é

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{2n+1}}_{=:\frac{\psi^{(2n)}(0)}{(2n)!}} x^{2n} \qquad \text{quando } x \in]-1,1[.$$

Daqui conclui-se imediatamente que $\psi^{(35)}(0) = 0$, pois a série só possui potências pares, ou seja, todos os coeficientes das potências de ordem ímpar são nulos.

Para a série de Taylor em $x = 1$ podemos começar, de novo, pela série geométrica e observar que, para $-1 < y < 1$,

$$\frac{1}{1+y} = \frac{1}{2+(y-1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{y-1}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(y-1)^n.$$

Como vimos antes, no nosso caso temos $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, pelo que, tomando $y = x^2$ na expressão acima:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x^2-1)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n(x+1)^n$$

e usando a expressão do binómio de Newton $(x+1)^n = ((x-1)+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(x-1)^k$ conclui-se que

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^n 2^k \binom{n}{k}(x-1)^{n+k}.$$

Assim

$$\begin{aligned}\arctan x &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n 2^k}{n+k+1}\binom{n}{k}(x-1)^{n+k+1}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^{m-k}2^k\binom{m-k}{k}\Big](x-1)^{m+1}\end{aligned}$$

e usando de novo a série geométrica $\frac{1}{x} = \frac{1}{1+(x-1)} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(x-1)^j$ (válida se $x-1 \in]-1,1[$). Portanto, para $0<x<2$ temos

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{\arctan x}{x}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(x-1)^j\times\\ &\quad\times\sum_{m=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{\lfloor m/2\rfloor}(-1)^{m-k}2^k\binom{m-k}{k}\Big](x-1)^{m+1}\end{aligned}$$

e usando a fórmula para a multiplicação de séries absolutamente convergentes $\left(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\beta_m\right) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{p}\alpha_\ell\beta_{p-\ell}$ conclui-se que

$$\psi(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{p}\sum_{k=0}^{\lfloor (p-\ell)/2\rfloor}(-1)^{p-k}\frac{2^{k-1}}{p-\ell+1}\binom{p-\ell-k}{k}\right)}_{=\frac{\psi^{(p+1)}(1)}{(p+1)!}}(x-1)^{p+1}$$

e portanto

$$\psi^{(35)}(1) = 35!\sum_{\ell=0}^{34}\frac{1}{35-\ell}\sum_{k=0}^{\lfloor (34-\ell)/2\rfloor}(-1)^k 2^{k-1}\binom{34-\ell-k}{k},$$

cujo valor numérico pode ser calculado sem dificuldade utilizando um computador.