Atividade Formativa 2

Enunciado

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0 tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1.1. Calcule $f(0)$.

1.2. Seja $g(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

2. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua.

2.1. Mostre que existe $a \in [0,1]$ tal que $f(a) = a$.

2.2. Será que o ponto a é único?

3. Verifique que cada uma das seguintes equações tem uma única raiz real:

3.1. $x^3 + x - 1 = 0$.

3.2. $x^9 + 2x^5 - 5 = 0$.

4. Prove que a função

$$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x) + 2x^3 - 4$$

tem um zero no intervalo $[1,2]$. Por recurso ao teorema de Rolle verifique que esse zero é único.

5. Mostre cada uma das seguintes desigualdades:

5.1. Para quaisquer $0 < x < y$, $1 - \frac{x}{y} < \ln \frac{y}{x} < \frac{y}{x} - 1$.

5.2. Dada uma constante $\alpha > 1$, $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$, para todo $x > 0$.

5.3. Para uma constante $\alpha \in \,]0,1[$, $(1+x)^\alpha < 1 + \alpha x$, para qualquer $x > 0$.

6. Considere uma constante $0 < a \leq 1$ fixa.

6.1. Mostre que $(1+t)^a \leq 1 + t^a$ para qualquer $t \in [0,1]$.

6.2. Prove que

$$(x+y)^a \leq x^a + y^a, \quad \forall\, x, y \geq 0.$$

6.3. Considere uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^a$ convergente e de termos não negativos. Suponha que $x_n^a \leq 1$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

é convergente e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)^a \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^a.$$

7. Calcule os seguintes limites:

7.1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{\operatorname{sen}^2(x)}$.

7.2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen}(2x)}$.

7.3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^{1/x}$