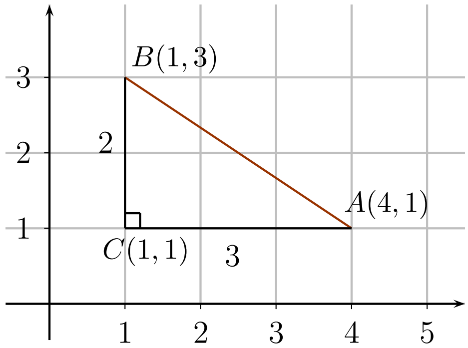
9. Distância no Plano

A distância entre dois pontos quaisquer, por exemplo $A(1,3)$ e $B(4,1)$, é dada pelo comprimento do segmento de recta de extremos A e B.



Para calcular esse comprimento consideramos um triângulo rectângulo, no nosso exemplo tem vértices A, B e $C(1,1)$, e uma vez que sabemos o comprimento dos catetos podemos calcular o comprimento da hipotenusa. Concretamente, a distância entre A e B, d, será dada por

$$d^2 = (4-1)^2 + (1-3)^2 = 9 + 4 = 13.$$

Assim $d = \sqrt{13}$.

Para o caso geral, consideremos no plano cartesiano dois pontos distintos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$. Se $y_1 \neq y_2$, podemos considerar um terceiro ponto $C(x_1, y_2)$ e formar o triângulo $\triangle ABC$.

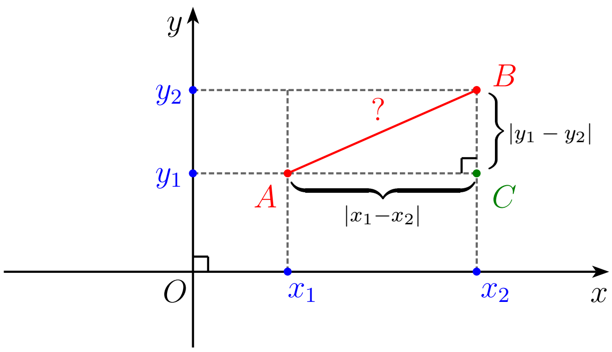


Figura 17: Distância entre dois pontos no plano

Sabemos, pela fórmula (1), que

$$d(A,C) = |x_1 - x_2| \ \text{ e } \ d(B,C) = |y_1 - y_2|. \qquad (*)$$

Pelo Teorema de Pitágoras

$$d(A,B)^2 = d(B,C)^2 + d(A,C)^2.$$

Substituindo, nesta expressão, as igualdades (*) obtemos

$$d(A,B)^2 = |y_1 - y_2|^2 + |x_1 - x_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

O membro direito da igualdade é positivo e, portanto, aplicando a raiz quadrada e trocando a ordem das parcelas, obtemos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Acabámos de provar uma fórmula geral que nos permite calcular a distância entre dois quaisquer pontos do plano conhecidas as suas coordenadas. Notemos que se os pontos A e B foram iguais, então a distância $d(A, B)$ é igual a zero pelo que a fórmula obtida também é verdadeira neste caso. Assim temos:

Se $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ são dois pontos do plano então

$$\boxed{d(A, B) = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}. \tag{3}$$

Aplicação 11. Consideremos os pontos $A(5, -3)$ e $B(-2, -5)$. Como

$$x_1 = 5\,,\ y_1 = -3 \ \text{ e } \ x_2 = -2\,,\ y_2 = -5$$

então, aplicando a fórmula 3, obtemos

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (-3 - (-5))^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}. \end{aligned}$$

~~**Resolução.**~~ $\cancel{AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (4 - 3)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}.}$

Exercício 11. Determine a distância entre os seguintes pontos.

a) $A(1, 2)$, $B(1, 3)$

b) $A(2, 1)$, $B(3, 1)$

c) $A(4, -1)$, $B(-1, 3)$

Aplicação 12. Considere os seguintes pontos: $A(-2, 0)$, $B(2, 1)$ e $C(1, -3)$. Diga se o triângulo definido por estes três pontos é equilatero, isósceles (ie, tem dois lados iguais) ou escaleno (ie, todos os lados são diferentes).

Resolução. Aplicando a fórmula da distância temos $AB = \sqrt{17}$, $BC = \sqrt{17}$ e $AC = \sqrt{18}$.

Exercício 12. Classifique os seguintes triângulos.

a) $A(1, 2)$, $B(1, 3)$, $C(3, 2)$

b) $A(-2, -1)$, $B(0, 3)$, $C(4, 1)$

c) $A(a, b)$, $B(a, -b)$, $C(0, 1)$

Aplicação 13. Prove que o triângulo definido pelos seguintes pontos $A(1,2)$, $B(2,5)$ e $C(4,1)$ é rectângulo.

Resolução. Aplicando a fórmula da distância temos $AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{20}$ e $AC = \sqrt{10}$. Agora, pelo Recíproco do Teorema de Pitágoras, temos $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercício 13. Verifique se os seguintes triângulos são rectângulos.

a) $A(-2,-1)$, $B(-1,-1)$, $C(-2,3)$

b) $A(3,-4)$, $B(-2,-5)$, $C(1,6)$

Aplicação 14. Determine x de tal forma que a distância de $A(2,0)$ a $B(x,4)$ seja 5.

Resolução. Aplicando a fórmula da distância temos $AB = \sqrt{(x-2)^2 + 4^2}$. Daqui resulta que

$$25 = (x-2)^2 + 4^2 = (x-2)^2 + 16 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow x-2 = \pm 3 \Rightarrow x = 5 \vee x = -1.$$

Exercício 14.

a) Encontre b tal que a distância entre $A(4,10)$ e $B(b,7)$ seja 5.

b) Encontre b tal que a distância de $A(b,b)$ à origem seja $\sqrt{18}$.

c) Encontre b tal que $A(b,2)$, $B(5,4)$ e $C(2,5)$ formem um triângulo isósceles.

10. Circunferências

Desenhe numa folha quadriculada os eixos cartesianos; seguidamente desenhe uma circunferência de centro na origem e raio 1. Cada ponto dessa circunferência tem coordenadas (x, y). Sabe qual a relação entre x e y? Nós sabemos que a circunferência de centro na origem e raio 1 é o conjunto dos pontos que está à distância 1 do centro. Ou seja,

$$C((0,0),1) = \{(x,y) \mid 1^2 = x^2 + y^2\}.$$

Assim, a relação geral entre o x e o y, nos pontos da circunferência, é

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Em geral, a circunferência de centro $(0,0)$ e raio r é o conjunto dos pontos (x, y) à distância r da origem:

$$C((0,0),r) = \{(x,y) \mid r^2 = x^2 + y^2\}.$$

À expressão $x^2 + y^2 = r^2$ chama-se habitualmente *equação da circunferência de centro na origem e raio r*.

Aplicação 15. Diga qual a equação da circunferência de centro na origem e raio 3.

Resolução. $x^2 + y^2 = 3^2$. Isto significa que qualquer ponto da circunferência satisfaz esta propriedade; e reciprocamente, qualquer ponto que satisfaça esta equação pertence à circunferência pedida. Por exemplo, o ponto $(0, 3)$ pertence à circunferência porque $0^2 + 3^2 = 3^2$.

Exercício 15. Determine a equação das seguintes circunferências de centro na origem e raio:

a) 5

b) π^2

c) $\sqrt{13}$

11. Circunferências não centradas na origem

Desenhe numa folha quadriculada os eixos cartesianos; seguidamente desenhe uma circunferência de centro no ponto $(2,0)$ e raio 1. Cada ponto dessa circunferência tem coordenadas (x,y). Sabe qual a relação entre x e y?
Nós sabemos que a circunferência de centro no ponto $(2,0)$ e raio 1 é o conjunto dos pontos que está à distância 1 do centro. Ou seja,

$$C((0,0),1) = \{(x,y) \mid 1^2 = (x-2)^2 + y^2\}.$$

Assim, a relação geral entre o x e o y, nos pontos da circunferência, é

$$(x-2)^2 + y^2 = 1.$$

Em geral, a circunferência de centro $(c_1,0)$ e raio r é o conjunto dos pontos (x,y) à distância r do centro e é dado por

$$C((c_1,0),r) = \{(x,y) \mid r^2 = (x-c_1)^2 + y^2\}.$$

Mais geralmente, a circunferência de centro (c_1,c_2) e raio r é o conjunto dos pontos (x,y) à distância r do centro e é dado por

$$C((c_1,c_2),r) = \{(x,y) \mid r^2 = (x-c_1)^2 + (y-c_2)^2\}.$$

Aplicação 16. Diga qual a equação da circunferência de centro no ponto $(-1,2)$ e raio 3.

Resolução. $(x-(-1))^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Isto significa que qualquer ponto da circunferência satisfaz esta propriedade; e reciprocamente, qualquer ponto que satisfaça esta equação pertence à circunferência pedida.

Exercício 16. Determine a equação das seguintes circunferências:

a) $C(-2,-3)$, $r=1$

b) $C(2,-1)$, $r=4$

c) $C(1,-1)$, $r=\sqrt{11}$

Exercício 17. Diga justificando se as circunferências $x^2+y^2=1$ e a circunferência de centro $C(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}})$ e raio 1 se intersectam em algum ponto.

a) $C(-2,-3)$, $r=1$

b) $C(2,-1)$, $r=4$

c) $C(1,-1)$, $r=\sqrt{11}$

12. Declive

A interpretação mais imediata do declive é que este nos dá uma medida da inclinação da linha. Mais à frente veremos outras interpretações.
O declive da recta que passa nos pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ é

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

Aplicação 17. Diga qual a declive da recta que incide com os pontos $A(1, 3)$ e $B(-1, 2)$.

Resolução. $m = \frac{2-3}{-1-1} = \frac{-1}{-2}$.

Exercício 18. Encontre o declive das rectas que incidem com os seguintes pontos:

a) $A(-2, -3)$, $B(1, 0)$

b) $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$

c) $A(0, 0)$, $B(4, 3)$

Aplicação 18. No plano cartesiano marque uma recta com declive $-2/3$ e que passe pelo ponto $(1, 1)$.

Resolução. Há duas formas de resolver este problema. Uma, gráfica, consiste em colocar o lápis no ponto $(1, 1)$ e depois contar -2 na vertical e 3 na horizontal (encontrando o ponto $(4, -1)$). A recta pretendida é a linha que passa nos pontos $(1, 1)$ e $(4, -1)$.

A segunda resolução é analítica. Queremos encontrar um ponto (x, y) tal que o declive da recta que incide com (x, y) e $(1, 1)$ é $-2/3$. Assim

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{-2}{3}.$$

Claro que esta equação tem muitas soluções. Como nós só queremos uma, podemos fazer, por exemplo, $y - 1 = -2$ e $x - 1 = 3$. daqui resulta $y = -1$ e $x = 4$.

Agora basta marcar a linha que incide com os pontos $(1, 1)$ e $(4, -1)$ (que é única uma vez que no plano cartesiano, dados dois pontos existe uma e uma só linha que incide com eles).

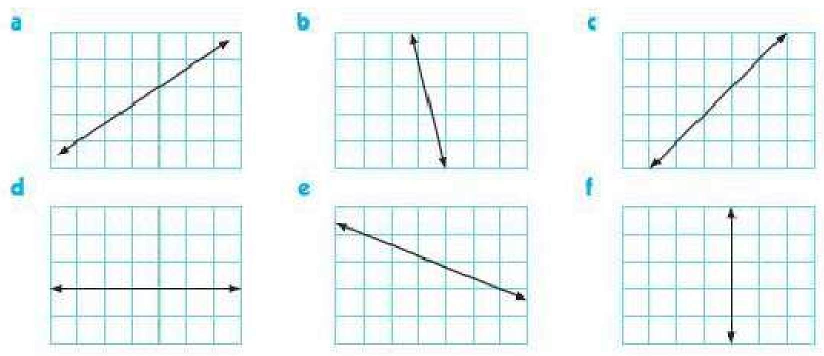
Exercício 19. Desenhe no plano cartesiano linhas que satisfaçam as seguintes condições:

a) passem pelo ponto $(1, -1)$ com declive

$$1/2, 2, 1, -1, 4, -1/4.$$

b) passem pelo ponto $(0, 1)$ com declive 0, -1, -2, -3, 1, 2, 3

c) Encontre o declive das seguintes linhas



13. Linhas Paralelas e Perpendiculares

- Duas linhas são paralelas se e só se têm o mesmo declive.

  Seja $m = \frac{a}{b}$. O recíproco negativo de m é $m' = \frac{-b}{a}$.

- Duas linhas são perpendiculares se e só se o declive de uma é o recíproco negativo do declive da outra.

  As linhas horizontais têm declive 0. As linhas verticais têm declive indefinido.

Aplicação 19. Suponha que temos uma linha com declive 1/2. Pretendemos determinar o declive de todas as linhas paralelas e perpendiculares à linha dada.

Resolução. As paralelas à linha dada são todas as linhas com declive 1/2. Por exemplo, a linha que incide com os pontos $(0,0)$ e $(2,1)$ tem declive 1/2 e por isso é paralela á linha dada.

Para determinar o declive de todas as perpendiculares temos de calcular o recíproco negativo de 1/2 que é $\frac{-2}{1}$, ou seja, -2. Assim todas as linhas com declive -2 são perpendiculares à linha dada. Por exemplo, a linha que incide com os pontos $(0,0)$ e $(-2,1)$ tem declive -2 pelo que é perpendicular à linha dada.

Exercício 20.

a) Encontre o declive das rectas perpendiculares a uma linha com declive:

$$1/3, 2, \pi, -4.$$

b) Prove que se a linha l é perpendicular a r e r é perpendicular a t, então l é paralela a t.

Aplicação 20. Encontre a tal que a linha que passa em $A(a,-1)$ e $B(2,3)$ tenha declive -2.

Resolução. Pela fórmula do declive (sabendo que o declive é -2) temos

$$-2 = \frac{3-(-1)}{2-a}.$$

Daqui resulta $4/-2 = 2-a$ e bem assim $-2 = 2-a$ o que implica $a = 4$. Agora bastaria verificar que a linha que passa pelos pontos $A(4,-1)$ e $B(2,3)$ tem declive -2.

Exercício 21. Encontre a tal que a linha que incide com os pontos:

a) $A(1,3)$ e $B(3,a)$ tenha declive 4

b) $A(a,-3)$ e $B(4,-1)$ tenha declive $1/2$

c) $A(3,a)$ e $B(a,5)$ tenha declive $-2/3$

d) $A(0,a)$ e $B(1,2)$ seja perpendicular às linhas de declive -3

e) $A(3,a)$ e $B(a,\pi)$ seja perpendicular às linhas de declive $-1/2$

Exercício 22. Dados os pontos $A(1,3)$, $B(-2,-1)$, $C(6,5)$ e $D(t,-3)$:

a) determine t de forma a que a linha que incide com A e B seja paralela à linha que incide com C e D

b) determine t de forma a que a linha que incide com A e D seja perpendicular à linha que incide com C e B

14. Pontos Colineares

Três pontos A, B e C são colineares se forem iguais os declives das linhas que passam por A e B, e por B e C.

Aplicação 21. Diga se os seguintes pontos são colineares: $A(0,-1)$, $B(2,5)$ e $C(-1,-4)$.

Resolução. O declive da linha que passo por A e B é $(5+1)/(2-0) = 6/2 = 3$. O declive da linha que passa por B e C é $(5+4)/(2+1) = 9/3 = 3$. Como os declives são iguais, os pontos são colineares.

Exercício 23.

a) Verifique se os seguintes pontos são colineares:

- $A(1,2)$, $B(4,6)$, $C(-5,-6)$
- $A(0,-2)$, $B(-1,-5)$, $C(4,10)$

b) Encontre c tal que os seguintes pontos sejam colineares

- $A(-1,2)$, $B(0,6)$, $C(c,-6)$
- $A(c,-2)$, $B(-1,-c)$, $C(4,10)$

A noção habitual de declive tem a ver com a inclinação de uma estrada ou de um telhado. Contudo, há outras grandezas igualmente familiares dadas por declives. Por exemplo, suponha que tem a recta que lhe dá a distância percorrida por um carro em função do tempo. Imagine que ao fim de 5 horas o carro percorreu $400Km$. Como ao fim de 0 horas o carro tinha percorrido $0Km$ e ao fim de 5 horas tinhas percorrido $400Km$, isto significa que a recta passa pelos pontos $(0,0)$ e $(5,400)$. O declive desta recta será

$$m = \frac{400-0}{5-0} = \frac{400}{5} = 80.$$

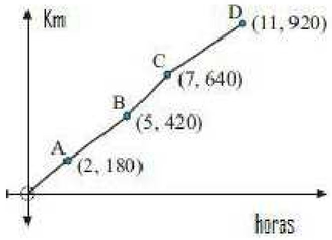
Qual a velocidade média do carro? A velocidade média é dada pelos quilómetros percorridos a dividir pelo tempo:

$$v = \frac{400}{5} = 80Km/h.$$

Como se vê a velocidade média entre dois pontos é dada pelo declive da linha que une esses dois pontos (no gráfico que nos dá o número de km percorridos em função do tempo).

Exercício 24.

a) A figura seguinte dá-nos a distância percorrida por um autocarro em função do tempo.

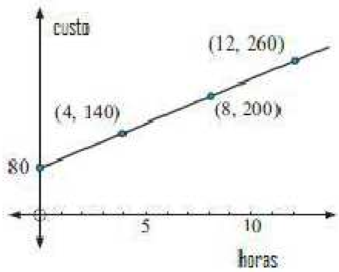


(i) Diga qual a velocidade média ao longo de toda a viagem

(ii) Diga qual a velocidade média em cada um dos troços da viagem

(iii) Diga se o troço de maior velocidade média (determinada analiticamente) era evidente no gráfico.

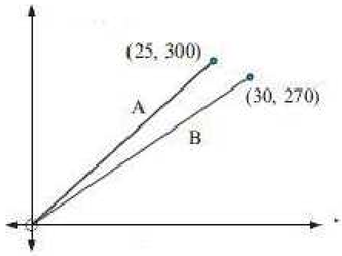
b) A figura seguinte dá-nos o custo de aluguer de uma escavadora em função do tempo



(i) Diga o que significa o ponto de intersecção da linha com o eixo dos yy

(ii) Determine o declive da linha e o significado desse declive

c) Na figura seguinte, a linha de A dá-nos os detalhes sobre consumo (nos xx) e a distância percorrida (nos yy) de um carro que viajou à velocidade constante de $50Km/h$; a linha B dá os mesmos detalhes para um carro que viajou à velocidade constante de $70Km/h$.



(i) Determine o declive de cada uma das linhas e o significado desse declive

(ii) Sabendo que um litro de gasolina custa 1.5E, diga qual a diferença dos custos numa viagem de $5000Km$ (diferença entre o carro que vai a $50Km/h$ e o que vai a $70Km/h$).