Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 7 a 17 de abril de 2023

Data de Limite de Entrega

17 de abril de 2023, até às 23h59 de Portugal Continental

Tema

Combinatória Enumerativa

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-fólio é de 4 valores distribuídos do seguinte modo: 0.25 valores para cada uma das questões de escolha múltipla **1** a **4**; 0.75 valores para cada uma das questões **5** a **8**.
2. Para a avaliação das questões, com exceção das quatro questões de escolha múltipla, constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada. Nas questões **5** a **8** não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Escreva sempre com letra legível.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **seis** páginas A4.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Gilda Ferreira, Mário Bessa, Ana Nunes, Gil Bernardes e José Agapito

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais, uma e só uma é verdadeira.

1. Definimos o espaço das sequências infinitas com dois símbolos 0 e 1 por

$$\Sigma_2 = \{s_0 s_1 s_2 \dots \,|s_k = 0 \text{ ou } 1\}$$

e consideramos a seguinte função *desvio* definida por

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \Sigma_2 & \longrightarrow & \Sigma_2 \\ & s_0 s_1 s_2 \dots & \longmapsto & s_1 s_2 s_3 \dots \end{array}$$

cujo efeito é *'desviar a sequência para a esquerda'* suprimindo a primeira entrada (exemplo: $\sigma(0011000101\dots) = 011000101\dots$).

A) A função σ é invertível.

B) A função σ é sobrejetiva.

C) A função σ é injetiva.

D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

2. Consideremos Σ_2 e σ como definidos acima. Dado $x \in \Sigma_2$ e $n \in \mathbb{N}$ dizemos que x é um ponto periódico de período n para σ se $\sigma^n(x) = x$. Por exemplo, existem dois pontos periódicos de período 1 a saber $0000\dots$ (sequência só de zeros) e $1111\dots$ (sequência só de uns). Outro exemplo de ponto periódico, neste caso de período 2, é o ponto $010101\dots$ ($s_0 = 0$, $s_{2n-1} = 1$ e $s_{2n} = 0$ onde $n \in \mathbb{N}$).

Denote por Per$_n(\sigma)$ o conjunto dos pontos periódicos de período n para σ. Observe que, por exemplo, Per$_1(\sigma) \subset$ Per$_2(\sigma)$ (se for periódico de período 1, então será periódico de período 2).

A) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\#$Per$_n(\sigma) = 2^{n-1}$.

B) Se $x \in$ Per$_3(\sigma)$, então $x \in$ Per$_5(\sigma)$.

C) Σ_2 não possui pontos não periódicos ou seja $\cup_{n\in\mathbb{N}}$Per$_n(\sigma) = \Sigma_2$.

D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

3. Considere agora o espaço das sequências infinitas com 5 símbolos $0, 1, 2, 3$ e 4 denotado por Σ_5 e a função desvio σ definida analogamente como acima. Seja $A \subset \Sigma_5 \cap \text{Per}_4(\sigma)$ o conjunto definido pelas sequências sem dígitos pares, $B \subset \Sigma_5 \cap \text{Per}_4(\sigma)$ o conjunto definido pelas sequências sem dígitos ímpares e $C \subset B$ o conjunto definido pelas sequências sem dígitos iguais consecutivos.

A) $5 \times (\#A) > \#B$.

B) $\#A = \#C$.

C) $A \cup B = \Sigma_5$.

D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

4. Seja Σ_2 definido acima e considere a correspondência

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \Sigma_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ & s_0 s_1 s_2 \ldots & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\infty} s_i \times 2^i \end{array}$$

que nos fornece a escrita de um número na base binária.

A) A sequência que está associada ao número real 38 tem apenas quatro dígitos 1 e todos os restantes 0.

B) Σ_2 não é um conjunto enumerável.

C) O número $\frac{1}{2}$ tem um representante em Σ_2 através da correspondência Φ.

D) Nenhuma das opções anteriores é verdadeira.

Nas perguntas **5.** a **8.** justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

5. Considere $n \geq 4$. Mostre usando indução matemática que o número de permutações de elementos de $[n]$ é estritamente maior do que a cardinalidade do conjunto formado por todos os subconjuntos de $[n]$ i.e. $n! > \#\mathcal{P}([n])$.

6. Sejam dados os conjuntos finitos I e J onde $\#I = i$ e $\#J = j$.

a) Quantas funções distintas $f\colon I \to J$ é possível definir?

b) Se $j \geq i$ quantas funções injetivas distintas $f\colon I \to J$ é possível definir?

7. Quantos sacos diferentes de dez amêndoas se podem fazer com amêndoas de quatro cores distintas?

8. Três casais amigos reservaram seis lugares contíguos no cinema. De quantas maneiras se podem sentar nesses lugares de forma a que nenhum dos casais tenha os seus elementos lado a lado?

FIM