ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 6 a 16 de janeiro de 2022

Data de Limite de Entrega

16 de janeiro de 2022, até às 23h55 de Portugal Continental

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes, determinantes, valores e vetores próprios.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

- A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

- Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira; deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

- É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta.

- Os Grupos II e III têm cotação de 1.1 valores cada.

- O Grupo IV tem a cotação de 0.8 valores.

Normas a respeitar

- O documento final deverá estar em formato pdf.

- Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

- O seu e-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4.

- Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

- Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo e-fólio B até à data e hora limite de entrega.

- Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

- O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Seja A uma matriz triangular 3×3, e $p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda+1)^2$ o seu polinómio característico. Considere as seguintes afirmações:

i) $\operatorname{tr} A = -1$.

ii) $\det A = 1$.

iii) A tem subespaços próprios de dimensão 1.

iv) A não tem subespaços próprios de dimensão 2.

Então a lista completa de afirmações verdadeiras é:

- ☐ **a)** ii) e iv).
- ☐ **c)** i), ii) e iv).
- ☐ **b)** i), ii) e iii).
- ☐ **d)** ii) e iii).

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $f(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \\ x & 0 \end{bmatrix}$.

Então:

- ☐ **a)** $\operatorname{Nuc} f = (0, 0)$.
- ☐ **b)** $\operatorname{Nuc} f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
- ☐ **c)** $\operatorname{Im} f$ tem dimensão 1.
- ☐ **d)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Nuc} f$.

3. Seja $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear.

Então:

- ☐ **a)** $g(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1)$.
- ☐ **b)** $g(1, 2, 3, 4) = g(1, 1, 1, 1) + g(0, 1, 2, 3)$.
- ☐ **c)** $g(0, 0, 0, 0) = (0, 1, 0)$.
- ☐ **d)** $g(2, 1, 2, 1) = 2g(1, 0, 1, 0)$.

4. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

- ☐ **a)** Se $\alpha \neq 0$ então A_α não tem valores próprios.
- ☐ **b)** A_α tem 2 valores próprios distintos $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ **c)** Se $\alpha = 1$ então A_1 tem 2 valores próprios distintos.
- ☐ **d)** Não existem valores de α para os quais os valores próprios de A_α são 0 e 2.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear definida por $T(a,b,c) = ax^2 + b(x+1)$, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Sejam $\mathcal{B} = ((1,0,1), (1,1,1), (1,1,0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$, e $\mathcal{B}' = \left(x^2 + x,\ x,\ x+1\right)$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

i) Determine justificadamente $A = \mathcal{M}(T;\ \mathcal{B},\ \mathcal{B}')$.

ii) Considere $\mathcal{B}'' = \left(x - 1, x^2 + x - 1,\ x^2 + 1\right)$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$. Determine justificadamente a matriz de mudança de base $Q \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(T;\ \mathcal{B},\ \mathcal{B}'') = QA$.

III. Seja $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

i) Determine justificadamente os valores próprios da matriz C.

ii) Determine justificadamente o espaço próprio associado a cada um dos valores próprios da matriz C.

iii) Determine justificadamente a multiplicidade algébrica e a a multiplicidade geométrica de cada valor próprio da matriz C.

IV. Considere uma matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Sejam μ um valor próprio de M, e u um vetor próprio associado a μ.

Mostre justificadamente que se $\lambda \in \mathbb{R}$ não é um valor próprio de M então

$$(M - \lambda I_n)^{-1} u = \frac{1}{\mu - \lambda} u.$$

Fim