Resumo – Matemática Finita

Tema 1 – Combinatória Enumerativa

1.1 O que é contar

- **Correspondência biunívoca** : Uma correspondência biunívoca Φ entre dois conjuntos A e B é uma relação binária entre A e B que verifica as duas seguintes condições:
  1) $\forall x \in A \ \ \exists^1 y \in B \ : \ x\Phi y$
     - [1a] $\forall x \in A \ \ \exists y \in B \ : \ x\Phi y$ existência
     - [1b] $\forall x \in A \ \ \forall y_1, y_2 \in B \ \ (x\Phi y_1 \wedge x\Phi y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2)$ unicidade
  2) $\forall y \in B \ \ \exists^1 x \in A \ : \ x\Phi y$
     - [2a] $\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ : \ x\Phi y$ existência
     - [2b] $\forall x_1, x_2 \in A \ \ \forall y \in B \ \ (x_1\Phi y \wedge x_2\Phi y \Longrightarrow x_1 = x_2)$ unicidade
- **Princípio da Correspondência** : Diz-se que dois conjuntos têm a mesma cardinalidade, ou o mesmo número de elementos, se existe uma correspondência biunívoca entre eles.
- **Função** : Uma função Φ de A em B é uma correspondência de A em B que verifica as condições **[1a]** $\forall x \in A \ \ \Phi(x) \in B$ e **[1b]** $\forall x \in A \ \ \forall y_1, y_2 \in B \ \ (\Phi(x) = y_1 \wedge \Phi(x) = y_2 \Longrightarrow y_1 = y_2)$.
  - Φ é **injectiva** sse $\forall x_1, x_2 \in A \ \ \big(x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \Phi(x_1) \neq \Phi(x_2)\big)$ ou $\forall x_1, x_2 \in A \ \ (\Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$ **[2b]**
  - Φ é **sobrejectiva** sse $\forall y \in B \ \ \exists x \in A \ : \ \Phi(x) = y$ **[2a]**
  - Φ é **bijectiva** sse $\forall y \in B \ \ \exists^1 x \in A \ : \ \Phi(x) = y$ **[2a]** e **[2b]**
- **Partição numérica** : Uma partição numérica de um número natural n diferente de zero é uma maneira de escrever n como soma de números naturais não nulos, sem atender à ordem das parcelas.
- **Função inversa** : Se numa correspondência biunívoca Φ entre dois conjuntos A e B trocarmos os papéis de A e B, obtemos a correspondência inversa Ψ e temos:
  $$\Phi(a) = b \ \text{ sse } \ \Phi^{-1}(b) = \Psi(b) = a$$
- **Proposição** : Seja Seq_n o conjunto de todas as sequências binárias de comprimento n e seja $\mathcal{P}(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos de X. Então:
  Os conjuntos Seq_n e $\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\})$ têm a mesma cardinalidade
- $[\boldsymbol{n}]$: Conjunto dos núm. naturais não nulos que são inferiores a n. Assim, $[n] = \{1,2,\dots,n\}$
- **Cardinalidade** : Seja n um número natural. Diz-se que a cardinalidade de um conjunto X é n, e escreve-se $\#X = n$, se existir uma função bijectiva entre os conjuntos $[n]$ e X. Também se diz que X tem n elementos.
- **Teorema Fundamental das Cardinalidades Finitas** : Se n e m são números naturais diferentes, então não existem bijecções entre $[n]$ e $[m]$.
- **Conjunto finito** : Um conjunto X diz-se finito se existir um número natural n tal que X tenha cardinalidade n.
- **Proposição** : Sejam X e Y conjuntos finitos disjuntos. Então $\#(X \cup Y) = \#X + \#Y$.
  $$\#(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) = \#X_1 + \#X_2 + \dots + X_n <=> \#\bigcup_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} \#X_k$$
- **Proposição** : Sejam X e Y conjuntos finitos. Então $\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y$.
- **Proposição** : Seja $\Phi : A \to B$ uma função entre dois conjuntos finitos. Suponhamos que $\#A > r \cdot \#B$. Então, para algum $b \in B$, $\#A_b > r$.
- **Princípio dos Cacifos** : Sejam A e B conjuntos finitos, o primeiro dos quais de cardinalidade superior ao do segundo. Então, não existem injecções de A para B.

Anexo fundacional

- Lema : Seja $f : [n] \to [m]$ uma função injectiva que não é sobrejectiva. Então, existe uma função injectiva de $[n]$ para $[m-1]$.
- Teorema : Se m e n são números naturais tais que $m < n$, então não existem injecções de $[n]$ para $[m]$. (versão do teorema dos cacifos)
- Corolário : Se X é um conjunto finito e se f é uma função injectiva de X para X, então f é uma bijecção.
- Lema : Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios. Há uma sobrejecção de X para Y sse há uma injecção de Y para X.
- Proposição : Sejam X e Y conjuntos finitos não vazios de cardinalidades não nulas n e m, respectivamente. Então:
  1) Há uma injecção de X para Y sse $n \le m$.
  2) Há uma sobrejecção de X para Y sse $m \le n$.
- Corolário : Se X é um conjunto finito e se f é uma função sobrejectiva de X para X, então f é uma bijecção.

1.2 Coeficientes binomiais

- Proposição : Se X tem n elementos, então $\mathcal{P}(X)$ tem 2^n elementos.
- Princípio da Indução Matemática : Se uma propriedade é verdadeira para 0 e se, sempre que é verdadera para n também é verdadeira para $n+1$, então é verdadeira para todos os números naturais.
- Coeficiente binomial : Combinações de n, tomadas k a k. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- Lei da simetria : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- Binómio de Newton : $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$; Caso particular: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- Lei de Pascal : Se $1 \le k \le n$, então $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- Potência (fact.) decrescente : $n^{\underline{k}} = n(n+1)\dots(n+k-1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Arranjos de n, k a k.
- Factorial : $n! = n(n-1)\dots 2 \cdot 1$.
- Revisão trinomial : $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}$
- Fórmula da extracção : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
- Adição paralela : $\sum_{k=0}^{n} \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$
- Adição do índice superior : $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
- Adição alternada do índice superior : $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$
- Convolução de Vandermonde : $\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$
- Coeficiente trinomial : $\binom{m+n+p}{m,n,p} = \frac{(m+n+p)!}{m!n!p!}$
- Teorema Trinomial : $(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0\le i,j,k\le n \\ i+j+k=n}} \binom{n}{i,j,k} x^i y^j z^k$
- Coeficiente multinomial : $\binom{n_1+n_2+\cdots+n_s}{n_1,n_2,\dots,n_s} = \frac{(n_1+n_2+\cdots+n_s)!}{n_1!n_2!\dots n_s!}$

1.4 A tabela dos doze caminhos

$\#X = n$; $\#Y = m$	f qualquer	f injectiva	f sobrejectiva
elem. de X dist. elem. de Y dist.	1. m^n	2. $m^{\underline{n}}$	
elem. de X indist. elem. de Y dist.	4. $\binom{n+m-1}{n}$	5. $\binom{m}{n}$	6. $\binom{n-1}{m-1}$

- **Problema** : Sejam n e r números naturais positivos. A equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ tem $\binom{r+n-1}{r}$ soluções nos números naturais. (truque dos separadores)
- **Função (estr.) crescente** : Uma função $f : [n] \to [m]$ diz-se estritamente crescente (resp.: crescente) se $f(i) < f(j)$ (resp.: $f(i) \leq f(j)$), sempre que $1 \leq i < j \leq n$.
- **Teorema** : Sejam n e m números naturais. Tem-se:
  1) O número de funções estritamente crescentes de $[n]$ para $[m]$ é $\binom{m}{n}$.
  2) O número de funções crescentes de $[n]$ para $[m]$ é $\binom{n+m-1}{n}$.

1.5 O princípio da inclusão/exclusão

- **Fórmula da inclusão/exclusão** :

$$\#(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n) = \sum_{i=1}^{n} \#X_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(X_i \cap X_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(X_i \cap X_j \cap X_k) - \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq n} \#(X_i \cap X_j \cap X_k \cap X_l) + \cdots + (-1)^{n-1} \#(X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n)$$

- **Desarranjo ("n subfactorial")** : $n_¡ = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$
- **Probabilidade de uma permutação ser um desarranjo** : $\frac{n_¡}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \approx 0{,}367$

1.6 Enumerabilidade

- **Definição (enumerável)** : Um conjunto não vazio diz-se <u>enumerável</u> se for possível listá-lo por meio de uma sequencia infinita: $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ De um modo mais formal, diz-se que um conjunto não vazio X é enumerável se for imagem sobrejectiva do conjunto dos números naturais. Por conveniência, diz-se que o conjunto vazio $\emptyset$ é enumerável.
  1) O conjunto dos números inteiros é enumerável.
  2) Todo o conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é enumerável. (podemos repetir elementos)
  3) A união de dois conjuntos enumeráveis ainda é um conjunto enumerável.
  4) Seja X um conjunto enumerável e $f : X \to Y$ é uma aplicação sobrejectiva, então Y é um conjunto enumerável.
  5) O conjunto de todas as sequências binárias finitas é enumerável.
     - Dado um conjunto A, finito e não vazio, denota-se por A^* o conjunto de todas as sequências finitas de elementos de A. Neste contexto, diz-se que A é um <u>alfabeto</u> e, os seus elementos dizem-se <u>letras</u> (ou os "símbolos") e os elementos de A^* dizem-se <u>palavras</u> desse alfabeto. → O conjunto das palavras de um alfabeto (finito) é enumerável.
  6) Se $\mathcal{X}$ é um conjunto enumerável de conjuntos enumeráveis, então a sua uniãp, representada por $\bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$, também é um conjunto enumerável.
  7) Se X e Y são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.
  8) Se X é um conjunto enumerável e $Y \subseteq X$, entãao Y também é enumerável.

- **Definição (numerável)** : Um conjunto X diz-se numerável se tiver a mesma cardinalidade que $\mathbb{N}$ (i.e., se existir uma bijecção entre X e $\mathbb{N}$). Também se diz que X tem cardinalidade $\aleph_0$.
- **Lema** : Todo o subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tem cardinalidade $\aleph_0$.
- **Proposição** : Um conjunto infinito é numerável se, e somente se, é enumerável.
- **Lema da Diagonalização** : Dada uma qualquer "matriz" quadrada infinita de zeros e uns cujas entradas α_{ij} estão indexadas por pares de números naturais existe necessáriamente uma sequência binária infinita de $d_0, d_1, d_2, d_3, \ldots$ que difere de toda a linha (e de toda a coluna da matriz dada.
- **Teorema de Cantor** : O conjunto de todas as sequências binárias infinitas não é enumerável.
- Nota : Nem todos os infinitos são semelhantes. Num certo sentido, o conjunto de todas as sequências binárias infinitas tem uma cardinalidade maior que o conjunto dos números naturais. Esta cardinalidade denota-se por c (c de contínuo) ou por $2^{\aleph_0}$.
- **Corolário** : O conjunto de todos os números reais não é enumerável.

Tema 2 – Somas

2.1 A notação Σ

- **Notação Σ** : $\sum_{i=1}^{n} a_i$
  - i : variável de indexação do somatório ($i \in \mathbb{N}$) → variável muda
  - 1 : índice inferior
  - n : índice superior
- **Requisitos Lógicos** :
  1) Primeiro Requisito Lógico : A variável de indexação do somatório não pode ocorrer, nem na expressão do limite superior, nem na expressão do limit inferior do somatório.
  2) Segundo Requisito Lógico : A variável de indexação do somatório pode ser mudada para uma outra qualquer, desde que essa outra seja uma variável que não ocorra no somatório.
  3) Terceiro Requisito Lógico : Não se pode substituir uma variável livre por uma expressão onde ocorra uma variável que, após substituição, fique muda.
- **Notação Σ Generalizada** : $\sum_{1 \le i \le n} a_i$ (formalmente : $\sum_{P(i)} a_i$)
  - Se não existem indíces i para os quais $P(i)$ é verdadeira, temos a soma vazia (=0)
- **Notação de Iverson** : $\sum_i a_i \, \|P(i)\| = \sum_{i=0}^{n} a_i$ onde $\|P(i)\| = \begin{cases} 0 \text{ } se \text{ } P(i) \text{ é } falsa \\ 1 \text{ } se \text{ } P(i) \text{ é } verdadeira \end{cases}$
- **Número Harmónico (série harmónica)** : $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ Nota: $H_0 = 0$

2.2 Vinte e três somas

- **Lei Distributiva** : Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então $\sum_{i \in I} c a_i = c \sum_{i \in I} a_i$ para qualquer número real c.
- **Lei Associativa** : Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, sejam a_i e b_i números reais. Então $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$.
- **Lei Comutativa** : Seja I um conjunto finito e, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Além disso, seja $\sigma : I \to I$ uma bijecção. Então $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a_{\sigma(i)}$.

- **Soma de uma progressão aritmética** : produto do números de parcelas da progressão pela média aritmétia entre a primeira e a última parcela.
- **Lei da Mudança de Variável** : Sejam I e J conjuntos finitos e seja $\sigma : J \to I$ uma bijecção. Além disso, para cada $i \in I$, seja a_i um número real. Então $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}$.
- **Lei da Decomposição** : Seja K um conjunto finito e suponhamos que $K = I \cup J$ é uma união disjunta de dois subconjuntos I e J. Além disso, para cada $k \in K$, seja a_k um número real. Então $\sum_{k\in K} a_k = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} a_j$.
- **Método da Perturbação** : $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i <=> S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1}$
- **Método da Diferenciabilidade** : Se $\sum_{i=1}^{n} a_i = S$ então $\sum_{i=1}^{n} i a_i = S'$ (com alguns ajustes)
- **Lei da Decomposição Generalizada** : Seja I um conjunto finito e suponhamos que $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_m$ é uma união disjunta de m subconjuntos $I_1, I_2, \dots, I_m$. Além disso, para cada $i \in I$, seja a_i um número real.

  Então $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i + \dots + \sum_{i\in I_m} a_i = \sum_{k=1}^{m} \sum_{i\in I_k} a_i$.
- **Lei Associativa Generalizada (Lei de Fubini)** : Sejam $I = \{1,2,\dots,m\}$ e $J = \{1,2,\dots,n\}$ e seja a_{ij} um número real. Então $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$
  - Caso particular : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}$ (usar notação de Iverson)
- **Método da expansão-contracção** : De maneira informal, neste método vamos:
  - transformar uma soma simples nume dupla → expansão
  - efectuamos cálculos na soma dupla; eventualmente trocamos somatórios (de acordo com a lei associativa generalizada)
  - transformamos a soma dupla numa soma simples – contracção
  - terminamos os cálculos
- **Relação de Inversão** : Sejam $x_0, x_1, x_2, \dots$ e $y_0, y_1, y_2, \dots$ duas sucessões (infinitas) de números reais e suponhamos que elas estão relacionadas do seguinte modo:

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k y_k$$

  para todo o $n \geq 0$. Então, podemos concluir que

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k x_k$$

  para todo o $n \geq 0$.
- **Lei Distributiva Generalizada** : Sejam I e J conjuntos finitos e, para cada $i \in I$ e cada $j \in J$, sejam a_i e b_j números reais. Então $\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I} \sum_{i\in J} a_i b_j$.
- **Lei Telescópica** : Sejam m e n dois números naturais tais que $m < n$ e sejam $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Então $\sum_{i=m}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_m$ ou $\sum_{i=m}^{n-1} \Delta a_i = a_i|_m^n$
- **Anti-Diferança / Soma Indefinida** : Dada uma soma $\sum_{i=m}^{n-1} b_i$ só podemos aplicar a Lei Telescópica se existir uma sucessão $a_0, a_1, a_2, \dots$ tal que $b_i = \Delta a_i$, para $i \geq m$. A sucessão (a_n) chama-se <u>anti-diferença</u> ou <u>soma indefinida</u> da sucessão (b_n) e escreve-se $\sum b_i = a_i$.

  Assim : $\sum b_i = a_i <=> \Delta a_i = b_i$

  → o paralelismo entre diferença e anti-diferença é análogo ao entre derivada e primitiva.
- **Método da Soma por Partes** : Sejam $a_0, a_1, \dots, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_n$ duas sucessões de números reais. Então $a_i \Delta b_i = \Delta(a_i b_i) - b_{i+1} \Delta a_i$

  e, aplicando somas, obtemos $\sum_{i=m}^{n-1} a_i \Delta b_i = a_i b_i|_m^n - \sum_{i=m}^{n-1} b_{i+1} \Delta a_i$

- **Tabela das Diferenças e Anti-Diferenças**

Sucessão	Diferença	Anti-Diferença	Soma
a_i	Δa_i	$\sum a_i$	$\sum_{i=0}^{n-1} a_i$
1	0	i	n
$i^{\underline{m}}$	$mi^{\underline{m-1}}$	$\dfrac{i^{\underline{m+1}}}{m+1}$	$\dfrac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$
$\dfrac{1}{i+1}$	$-\dfrac{1}{(i+1)(i+2)}$	H_i	H_n
2^i	2^i	2^i	2^n-1
x^i	$(x-1)x^i$	$\dfrac{x^i}{x-1}$	$\dfrac{x^n-1}{x-1}$

Tema 3 – Recorrências e Funções Geradoras

3.1 Relações de Recorrência

- **Relação de Recorrência** : Dada uma sucessão $a_0, a_1, a_2, \ldots$ uma relação recorrência ou recuriva, para a sucessão dada, é uma fórmla que relaciona cada termo a_n com os termos que o precedem $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$: $a_n = f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), n \geq k+1$
  As condições iniciais para a relação de recorrência especificam os valores dos termos $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ para um índice k fixo.
- **Método de diante para trás** : Suponhamos que temos a fórmula de recorrência
  $$a_n = f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), n \geq k+1 \qquad (*)$$
  e que está sujeita a k condições iniciais. Na igualdade (*) substituimos a_{n-1} por uma expressão do tipo (*) e depois a_{n-2} e assim sucessivamente até ao termo a_0, de modo a desaparecerem os termos da sucessão. Este método pressupõe alguma adivinhação por da forma geral. Assim a fórmula obtida deverá ser provada pelo método de indução matemática.
- **Princípio da Indução Matemática (Indução Simples)** : Se uma propriedade é verdadeira para 0 e se, sempre que é verdadera para n, também é verdadeira para $n+1$, então é verdadeira para todos os números naturais.
  $$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n\big(P(n) \Rightarrow P(n+1)\big) \\ \hline \therefore \forall n P(n) \end{array}$$
- **Princípio da Indução Matemática (Indução Completa)** : Se uma propriedade é verdadeira para 0 e se, sempre que é verdadera para todo o natural $m \leq n$, também é verdadeira para $n+1$, então é verdadeira para todos os números naturais.
  $$\begin{array}{l} P(0) \\ \forall n[P(0)\&P(1)\&\ldots\&P(n) \Rightarrow P(n+1)] \\ \hline \therefore \forall n P(n) \end{array}$$

- **Sucessão de Fibonacci** : $\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$, $para\ n \geq 3$
- **Fórmula de Binet** : Para qualquer número natural $n \geq 1$, o n-ésimo número de Fibonacci é dado por $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \widehat{\Phi}^n\right)$ onde $\Phi^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\widehat{\Phi}^n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
  Nota: A fórmula de Binet é verdadeira pata todo o número natural se definirmos $F_0 = 0$.

Anexo sobre o Princípio da Indução

- **Teorema** : O princípio da indução simples implica o princípio da indução completa.
- **Princípio do Mínimo** : Seja P uma propriedade de números naturais. Se existe um número natural n tal que $P(n)$, então existe o menor dos naturais com essa propriedade, i.e., existe um número natural n_0 tal que $P(n_0)$ e tal que, para nenhum natural $m < n_0$, se tem $P(m)$.
  Na linguagem simbólica: $$\frac{\exists n P(n)}{\therefore \exists n (P(n_0) \wedge \forall m[m < n_0 \Rightarrow \neg P(m)])}$$
  onde $\neg P$ é a negação da propriedade P.
- **Teorema** : O princípio da indução completa implica o princípio do mínimo.

3.2 Recorrências Lineares de Coeficientes Constantes

- Uma **relação de recorrência linear, homogénea e com coeficientes constantes** é dada por uma fórmula do tipo $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$ (1) ,
  em que k é um número fixo (independente de n= e $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ (também independentes de n) e por k **condições iniciais** $x_0 = b_0, x_1 = b_1, \ldots, x_{k-1} = b_{k-1}$ (2) ,
  onde $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$ são números previamente dados.
  Uma **solução** da relação de recorrência acima é uma sucessão (infinita) de números reais $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ tal que $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$ e
  tal que, para todo $n \geq k$, $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$
- **Pequena Nota** : $x_n = c x_{n-1} <=> x_n = c^n x_0$
- **Princípio da Sobreposição** : Sejam $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$ duas soluções da mesma fórmula de recorrência linear, homogénea com coeficientes constantes : $x_n = c_1 x_{n-1} + \cdots + c_k x_{n-k}$.
  Então, para quaisquer números reais ou complexos r e s, a sucessão $\langle r a_n + s b_n \rangle$ também é uma solução da mesma fórmula de recorrência.
  Nota : O princípio da sobreposição generaliza-se a qualquer combinação linear de um conjunto finito de soluções da mesma fórmula de RLHCC.
- **Polinómio característico de uma relação de RLHCC** :
  Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$ (1) uma fórmula de RLHCC.
  1. Seja λ uma raíz (real/compl.) do polinómio $p(t) = t^k - c_1 t^{k-1} - \cdots - c_{k-1} t - c_k$ (3) na indeterminada t. Então, a sucessão $\langle \lambda^n \rangle$ é uma solução da fórmula de recorr. (1).
     - O polinómio (3) diz-se **polinómio característico** da fórmula de recorrência (1).
     - As raízes deste polinómio chamam-se raízes características da fórmula de rec. (1).
  2. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ todas as raízes características da fórmula de recorrência (1) e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ números reais ou complexos. Então, a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por
     $$a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_r \lambda_r^n \qquad (4)$$
     é uma solução da fórmula de recorrência (1).
- **Polinómio característico: caso das raízes simples** : Seja (1) uma fórmula de RLHCC e seja (3) o seu polinómio característico. Suponhamos que $p(t)$ tem exactamente k **raízes** (reais ou complexas) **distintas** $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Então, qualquer solução $\langle a_n \rangle$ da fórmula de recorrência (1) tem a forma : $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n$, $n \in \mathbb{N}$ onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ são num. r. ou compl.
- Números Complexos (revisão) :
  - Forma algébrica : $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$ (i: unidade imaginária)
  - Conjugado : $\bar{z} = a - bi$; $\bar{z} = r\,\mathrm{cis}(-\theta)$

- Forma trigonométrica : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\operatorname{cis}\theta$
  - $\rightarrow$ Módulo : $r = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$
  - $\rightarrow$ Argumento : $\theta = \arctan\frac{b}{a} = \arg z$
- $z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$; $z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$ F. de Moivre

- ...

4.1.1 Séries formais

- **Produto de convolução** : Por definição, chamamos convolução das sucessões $\langle a_n\rangle$ e $\langle b_n\rangle$ à sucessão $\langle w_n\rangle$ cujo termo geral é $w_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.
- **Série formal** : Uma série formal em t é uma expressão do tipo : $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ (1) onde, para qualquer número natural n, a_n é o <u>n-ésimo coeficiente</u> de $A(t)$.
  - **Igualdade de duas séries formais** : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n <=> a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$
  - Se a sucessão $\langle a_n\rangle$ satisfaz $a_m = 0, \forall m > n$, então escrevemos $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ e $A(t)$ diz-se um **polinómio em t**.
- **Operações com séries formais** : Sejam $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ e $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ duas SFs.
  - **Soma** : $A(t) + B(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)t^n$
  - **Produto (convolução)** : $A(t)\cdot B(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)t^n$
  - <u>Observações</u> : As operações de adição e multiplicação de séries formais generalizam as respectivas operações entre polinómios e satisfazem as leis comutativas, associativas e distributivas.
- **Séries formais invertíveis** : Uma SF $A(t)$ é invertível se existir uma SF $B(t)$ tal que
$$A(t)\cdot B(t) = 1$$
$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ é <u>invertível</u> sse $a_0 \neq 0$ <u>Nota</u>: inversa : $B(t) = A(t)^{-1} = \frac{1}{A(t)}$
- **"Coeficiente binomial" $\binom{x}{n}$** : Para simplificar a escrita, definimos $\binom{x}{n}$, $\forall x \in \mathbb{R}\cup\mathbb{C}$, por $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$, convencionando que $\binom{x}{0} = 1$. Nota: $\binom{-1}{n} = (-1)^n$
- **Teorema da expansão binomial (para expoentes inteiros)** :
$$\text{Temos} \quad (1+t)^m = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}t^n \quad , \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$
- **Função Geradora** : A série formal $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ diz-se função geradora da sucessão $\langle a_n\rangle$ porque nos dá informação sobre os termos $a_0, a_1, a_2, \ldots$, permitindo manipular algébrica mente a sucessão $\langle a_n\rangle$.
  - Entende-se por <u>forma fechada</u> de uma função geradora $A(t)$, uma expressão do tipo $\frac{a(t)}{b(t)}$, com $a(t), b(t)$ polinómios em t, que represente $A(t)$.
  - Entende-se por <u>forma aberta</u> de uma função geradora $A(t)$, uma expressão do tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ que represente $A(t)$.

- **Sinopse de algumas funções geradoras** :

	$A(t)$	$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$	$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$
1	1	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n=0 \Vert t^n$	$1,0,0,0, \dots$
2	t	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n=1 \Vert t^n$	$0,1,0,0,0, \dots$
3	t^2	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n=2 \Vert t^n$	$0,0,1,0,0,0, \dots$
4	t^m	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n=m \Vert t^n$	$0, \dots, 0,1,0,0, \dots$
5	$(1+t)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} t^n$	$1, m, \binom{m}{2}, \dots, \binom{m}{m}, 0,0, \dots$
6	$(1-t)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} t^n$	$1, -m, \binom{m}{2}, \dots, (-1)^m \binom{m}{m}, 0,0, \dots$
7	$(1+at)^m$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n$	$1, am, a^2 \binom{m}{2}, \dots, a^m \binom{m}{m}, 0,0, \dots$
8	$\frac{1}{1+t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$	$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$
9	$\frac{1}{1-t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} t^n$	$1,1,1,1, \dots$
10	$\frac{1}{1-2t}$	$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n$	$1,2,4,8,16,32 \dots$
11	$\frac{1}{1-at}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n t^n$	$1, a, a^2, a^3, \dots$
12	$\frac{1}{1-t^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert n \text{ é } par \Vert t^n$	$1,0,1,0,1,0, \dots$
13	$\frac{1}{1-t^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \Vert m \text{ divide } n \Vert t^n$	$1,0, \dots, 0,1,0, \dots, 0,1,0, \dots$
14	$\frac{1}{(1-t)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n$	$1,2,3,4,5,6, \dots$
15	$\frac{1}{(1-t)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, m, \binom{m+1}{2}, \binom{m+2}{3}, \dots$
16	$\frac{1}{(1-at)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, am, a^2 \binom{m+1}{2}, a^3 \binom{m+2}{3}, \dots$
17	$\frac{1}{(1+t)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) t^n$	$1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$
18	$\frac{1}{(1+t)^m}$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m+n-1}{n} t^n$	$1, -m, \binom{m+1}{2}, -\binom{m+2}{3}, \dots$

4.1.2 Aplicações a recorrências lineares

- **Teorema das Fracções Parciais (caso das raízes simples)** : Sejam dados polinómios $a(t)$ e $b(t)$ (de coeficientes reais ou complexos). Suponhamos que $b(t)$ tem grau r e suponhamos que existem números complexos $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, não nulos e distintos dois a dois, tais que $b(t) = (1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t)\dots(1-\lambda_r t)$.
  Além disso, suponhamos que $a(t)$ tem grau estritamente menor que r. Então existem números complexos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (eventualmente nulos) tais que
  $$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda_1 t} + \frac{\alpha_2}{1-\lambda_2 t} + \cdots + \frac{\alpha_r}{1-\lambda_r t} \quad .$$
- **Lema** : Seja $b(t) = 1 + c_1 t + \cdots + c_r t^r$ um polinómio de grau r (com coeficientes reais ou complexos) e considere-se o polinómio $c(t) = t^r + c_1 t^{r-1} + \cdots + c_r$. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ (com $1 \le s \le r$) números complexos, não nulos e distintos dois a dois, tais que
  $$c(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_s)^{m_s}$$
  (deste modo $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ são todas as raizes de $c(t)$ tendo multiplicidades $m_1, \dots, m_s$ respectivamente). Então,
  $$b(t) = (1-\lambda_1 t)^{m_1}(1-\lambda_2 t)^{m_2}\dots(1-\lambda_s t)^{m_s}$$
- **Teorema das Fracções Parciais (caso geral)** : Sejam dados polinómios $a(t)$ e $b(t)$ (de coeficientes reais ou complexos). Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ números complexos, não nulos e distintos dois a dois, tais que
  $$b(t) = (1-\lambda_1 t)^{m_1}(1-\lambda_2 t)^{m_2}\dots(1-\lambda_s t)^{m_s}$$
  para alguns naturais $m_1, \dots, m_s$. Seja $r = m_1 + m_2 + \cdots + m_s$ e suponhamos que $a(t)$ tem grau estritamente menor que r. Então, existem polinómios (de coeficientes complexos) $a_1(t), a_2(t), \dots, a_s(t)$ (eventualmente nulos) tais que, para $1 \le i \le s$, $a_i(t)$ tem grau estritamente menor que m_i e
  $$\frac{a(t)}{b(t)} = \frac{a_1(t)}{(1-\lambda_1 t)^{m_1}} + \frac{a_2(t)}{(1-\lambda_2 t)^{m_2}} + \cdots + \frac{a_s(t)}{(1-\lambda_s t)^{m_s}} \quad .$$

- **Proposição (complemento ao Teorema das Fracções Parciais)** : Seja dado um polinómio $a(t)$ com grau estritamente menor que m (onde m é um número natural) e seja λ um número complexo não nulo. Então existem números complexos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tais que
  $$\frac{a(t)}{(1-\lambda t)^m} = \frac{\alpha_1}{1-\lambda t} + \frac{\alpha_2}{(1-\lambda t)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(1-\lambda t)^m} \quad .$$
- **Teorema Fundamental** : Seja dada uma fórmula d recorrêncis linear, homogéna e de coeficientes constantes, e suponhamos que o seu polinómio característico $p(t)$ se factoriza da forma $p(t) = (t-\lambda_1)^{m_1}(t-\lambda_2)^{m_2}\dots(t-\lambda_s)^{m_s}$
  onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ são as raízes não nulas (reais ou complexas), distintas duas a duas, de $p(t)$. Seja $\langle a_n \rangle$ uma solução desta fórmula de recorrência. Então, existem polinómios (de coeficientes complexos) $a_1(t), a_2(t), \dots, a_s(t)$ tais que, para $1 \le i \le s$, $a_i(t)$ tem grau estritamente menor do que m_i e
  $$a_n = a_1(n)\lambda_1^n + a_2(n)\lambda_2^n + \cdots + a_s(n)\lambda_s^n$$
- **Método das funções geradoras** :
  1) usamos a relação de recorrência dada para obter uma equação para a série formal $A(t)$
  2) resolvemos a equação para $A(t)$ – determinação de uma forma fechada para $A(t)$
  3) usamos:
     - → decomposição em fracções parciais;
     - → teorema da expansão binomial;

     para encontrar uma fórmula para os coeficientes de $A(t)$ – determinação de uma forma aberta para $A(t)$.