



ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Grupo I

1.

B não é um subespaço vetorial do espaço das funções porque a função nula não pertence a B.

O “zero” do espaço C é a função identicamente igual a zero, que satisfaz trivialmente a condição $f(2) = f(3)$.

A resposta certa é **d**).

2.

Calculando ABC concluímos que a resposta certa é **d**).

3.

Como as matrizes são 3×3 apenas as afirmações i) e iv) são verdadeiras e portanto a resposta certa é **c**).

4.

Calculando A^2 obtem-se $A^2 = I_2$ e portanto a resposta certa é **d**).

Grupo II

Vamos calcular o determinante aplicando o Teorema de Laplace à última coluna da matriz

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & N \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -N \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -N \neq 0,$$

e portanto temos um sistema de Cramer.

Aplicando a regra de Cramer z é dado por

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & N \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}}{-N} = \frac{9 - N}{-N} = \frac{N - 9}{N}$$

Não era pedido, mas do mesmo modo, $x = 5$ e $y = -4$.

Grupo III

Antes de começar a fazer contas convém olhar primeiro para a matriz $A_{x,y}$ e reparar que usando a primeira e a terceira linhas temos o bloco $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, e portanto a sua característica é no mínimo igual a 2. Condensando a matriz

$$\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ x^2 + xy & x + y & 0 \\ 2x & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\ell_3 - 2\ell_1]{\ell_2 - x\ell_1} \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ xy & y & -xy \\ 0 & -2 & 2 - 2y \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 - y\ell_1} \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & 0 & -xy - y^2 \\ 0 & -2 & 2 - 2y \end{pmatrix},$$

e trocando as linhas 2 e 3, tem-se $\begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & -2 & 2 - 2y \\ 0 & 0 & -xy - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 & y \\ 0 & -2 & 2 - 2y \\ 0 & 0 & -y(x + y) \end{pmatrix}.$

Esta matriz é triangular superior e portanto se $x \neq 0$ e $y(x + y) \neq 0$ então a característica é 3.

Caso contrário¹ tem-se $x = 0$ ou $y(x + y) = 0$ ou seja $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = -y$.

- Se $x = 0$ então a primeira coluna só tem zeros e portanto a característica é 2 seja qual for o valor de y . De modo equivalente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & y \\ 0 & -2 & 2 - 2y \\ 0 & 0 & -y^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 + 2\ell_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -y^2 \end{pmatrix}.$$

- Se $y = 0$ então a última linha só tem zeros e portanto a característica é 2. Obtem-se a matriz

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Se $x + y = 0$, ou seja $y = -x$, então a última linha só tem zeros e portanto a característica é 2. De modo equivalente

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 0 & -2 & 2 + 2x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\ell_2 + 2\ell_1} \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 2x & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em resumo se $x \neq 0$ e $y(x + y) \neq 0$ então a característica é 3, e se $x = 0$ ou $y(x + y) = 0$ então a característica é 2.

A matriz $A_{x,y}$ é invertível se e só se a característica é 3, ou seja se $x \neq 0$ e $y(x + y) \neq 0$.

¹Repare-se que a negação de $(x \neq 0 \text{ e } y(x + y) \neq 0)$ é $(x = 0 \text{ ou } y(x + y) = 0)$.

Se $x = y = 1$ então a matriz é invertível e

$$A_{1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies A_{1,1}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Grupo IV

Para mostrar que

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

podemos ver diretamente que se tem

$$a_{22}(a_{11} + b_1) - a_{21}(a_{12} + b_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + b_1a_{22} - b_2a_{21},$$

o que confirma a igualdade. É claro que também podíamos aplicar o Teorema de Laplace à primeira linha da matriz.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{e } C = \begin{bmatrix} a_{11} + b_1 & a_{12} + b_2 & \cdots & a_{1n} + b_n \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Para o caso geral vamos usar o Teorema de Laplace aplicado à 1ª linha da matriz C.

Por definição tem-se

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{11} + b_1)\widehat{c_{11}} + (a_{12} + b_2)\widehat{c_{12}} + \cdots + (a_{1n} + b_n)\widehat{c_{1n}} \\ &= [a_{11}\widehat{c_{11}} + a_{12}\widehat{c_{12}} + \cdots + a_{1n}\widehat{c_{1n}}] \\ &\quad + [b_1\widehat{c_{11}} + b_2\widehat{c_{12}} + \cdots + b_n\widehat{c_{1n}}]. \end{aligned}$$

Uma vez que a única diferença entre as três matrizes A, B e C é a primeira linha, concluímos que os complementos algébricos dessa primeira linha são iguais para as três matrizes, ou seja que

$$\widehat{a_{1i}} = \widehat{b_{1i}} = \widehat{c_{1i}}, \forall i = 1, \dots, n.$$

Então

$$\begin{aligned}\det C &= [a_{11}\widehat{c_{11}} + a_{12}\widehat{c_{12}} + \cdots + a_{1n}\widehat{c_{1n}}] + [b_1\widehat{c_{11}} + b_2\widehat{c_{12}} + \cdots + b_n\widehat{c_{1n}}] \\ &= [a_{11}\widehat{a_{11}} + a_{12}\widehat{a_{12}} + \cdots + a_{1n}\widehat{a_{1n}}] + [b_1\widehat{b_{11}} + b_2\widehat{b_{12}} + \cdots + b_n\widehat{b_{1n}}] \\ &= \det A + \det B.\end{aligned}$$

Grupo V

Se A é invertível e $A^3 + A = 0$ então $A^{-1}(A^3 + A) = A^{-1}0 = 0$, ou seja $A^2 + I_3 = 0$.

Tem-se então

$$A^2 + I_3 = 0 \implies A^2 = -I_3 \implies \det(A^2) = \det(-I_3) \implies (\det A)^2 = -1 \implies \det A = \sqrt{-1} = \pm i.$$

Também podíamos usar primeiro determinantes e depois o facto de A ser invertível. Com as devidas justificações tem-se

$$A^3 + A = 0 \implies A^3 = -A \implies \det A^3 = \det(-A) \implies (\det A)^3 = (-1)^3 \det A,$$

e portanto $(\det A)^3 + \det A = 0$ o que implica que $\det A \times ((\det A)^2 + 1) = 0$, e como $\det A \neq 0$, para o produto ser igual a zero terá de ser $(\det A)^2 + 1 = 0$.

FIM