

U.C. 21082
Matemática Finita
6 de julho de 2012

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 8 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7 e 8 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

5.	6.	7.	8.
4.5	5.5	2.2	3.8

Nome:

N^o de Estudante: B. I. n^o

Turma Assinatura do Vigilante:

Questões de escolha múltipla

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a resposta que pretende que seja considerada.

1. Sejam X e Y dois conjuntos tais que $X \cap Y = \{a\}$. Se $\#X = n$ e $\#Y = m$, então $\#(X \times Y)$ é igual a

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> a) $n \times m$ | <input type="checkbox"/> c) $(n - 1) \times m$ |
| <input type="checkbox"/> b) $(n - 1) \times (m - 1)$ | <input type="checkbox"/> d) $(n - 1) \times (m - 1) + 1$ |

2. O coeficiente de xy^2z^3 no desenvolvimento de $(x + 2y + 3z)^6$ é igual a:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> a) $\frac{6!}{2!3!}$ | <input type="checkbox"/> c) $\frac{6!}{2!}$ |
| <input type="checkbox"/> b) $6!3^2$ | <input type="checkbox"/> d) $\frac{6!}{2!3!}2^33^2$ |

3. Relativamente à soma

$$\sum_{n=1}^{30} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right),$$

pode dizer-se à partida que...

- a) a soma é um valor não negativo
- b) a soma é um valor não positivo
- c) a soma é um valor estritamente positivo
- d) só após o cálculo da soma é que se podem tirar conclusões quanto à positividade/negatividade da soma

Nome:

Nº de Estudante: B. I. nº

Turma Assinatura do Vigilante:

4. A soma

$$\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{i}$$

é igual a:

a) $\sum_{i=0}^n \binom{n+i}{n-i}$

c) $\sum_{i=0}^n 2^{n+i}$

b) $\sum_{i=0}^n \frac{1}{\binom{i}{n+i}}$

d) $\sum_{i=n}^{2n} \binom{i}{n}$

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5.

5.1. Mostre que

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2, \quad n \geq 1$$

5.2. Determine o valor da soma

$$\sum_{i=0}^n (i-n)^2$$

5.3. Calcule

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{(i^2 - j^2)^2}{(i+j)^2}$$

6. Seja $\langle a_n \rangle$ a solução da relação de recorrência

$$2x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

com condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

6.1. Por recurso ao **método de indução matemática**, prove que

$$a_{n+1} - a_n = (-1)^n \frac{1}{2^n}$$

para todo o $n \in \mathbb{N}$.

6.2. Utilizando a alínea anterior, determine o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$.

6.3. Confira o resultado obtido na alínea anterior por recurso ao **método do polinómio característico**.

7. Utilize o **método das funções geradoras** para determinar o termo geral da sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ e

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3^n, \quad n \geq 2.$$

8. Dadas as sucessões $\langle a_n \rangle$ e $\langle b_n \rangle$, considere as séries formais

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n,$$

tais que

$$A(t)B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n (n+1) t^{2n+1}.$$

8.1. Mostre que pelo menos uma das séries $A(t)$, $B(t)$ não é invertível.

8.2. Determine uma forma fechada para a série formal $A(t)B(t)$.

Se necessitar, para qualquer exercício, pode recorrer às seguintes fórmulas gerais:

$$\bullet (1 + at)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m}{n} t^n \quad \bullet \frac{1}{(1 - at)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \binom{m+n-1}{n} t^n$$

FIM