Computação Numérica 21180

Data de Realização

Decorre no dia 25 de janeiro de 2022

Tema

Introdução ao Cálculo Numérico

Trabalho a desenvolver

Resolver os exercícios propostos, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Recursos

Material indicado na plataforma, nomeadamente:
- M. R. Valença, *Análise Numérica*

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações: rigor científico, clareza, justificação e completude das respostas dadas. A cotação total deste Exame é de **20 valores**, sendo distribuídos por questão da seguinte forma:

1. Questão 1= 4.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 1.0 valores
   (b) 1.0 valores
   (c) 2.0 valores
2. Questão 2= 5.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:
   (a) 0.5 valores
   (b) 2.0 valores

(c) 0.5 valores

(d) 2.0 valores

3. Questão 3= 3.0 valores, distribuídos da seguinte forma pelas alíneas:

   (a) 1.5 valores

   (b) 1.5 valores

4. Questão 4= 4.0 valores

5. Questão 5= 4.0 valores

Total: 20.0 valores

Normas a respeitar

Deve submeter um único ficheiro comprimido .zip que contenha um documento em formato pdf com sua resolução dos problemas da prova bem como os ficheiros Octave produzidos para a resolução das questões 4 e 5 do Exame.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do Exame e do código da disciplina, segundo o exemplo apresentado: 000000exame-21180.zip

Os ficheiros Octave devem estar documentados.

Só serão aceites submissões efetuadas na plataforma, através do dispositivo para esse efeito.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

Esta prova tem a duração de 120 minutos, aos quais acresce um período de tolerância de 60 minutos. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Pedro Antunes

1. **[4.0 val.]** Considere a função $f(x) = e^{-x}\sin(x)$.

   (a) **[1.0 val.]** Calcule o polinómio de Taylor de grau 2 de f em torno do ponto $x_0 = 0$.

   (b) **[1.0 val.]** Recorrendo ao polinómio de Taylor obtido na alínea a) calcule uma aproximação de $f(0.1)$ e o respetivo erro absoluto.
   Observação - Se não resolveu a alínea a) e só nesse caso considere $p_2(x) = \frac{11}{10}(x - x^2)$,

   (c) **[2.0 val.]** Determine um valor de $\alpha > 0$ tal que consiga garantir que
   $$\max_{x\in[-\alpha,\alpha]} |f(x) - p_2(x)| < 10^{-5},$$
   onde p_2 é o polinómio determinado na alínea a).

2. **[5.0 val.]** Considere a seguinte equação não linear
   $$6e^{-x} + 5x^2 - 10x = 0. \tag{1}$$

   (a) **[0.5 val.]** Seja $g(x) = \dfrac{3}{5}e^{-x} + \dfrac{x^2}{2}$. Mostre que x é raíz da equação (1) se e só se x é ponto fixo da função g.

   (b) **[2.0 val.]** Prove que a sucessão
   $$x_{n+1} = g(x_n), n = 0, 1, ...$$
   converge para a única raíz de (1) no intervalo $I := [0, 1]$, qualquer que seja $x_0 \in I$.

   (c) **[0.5 val.]** Calcule as iterações x_1 e x_2 obtidas pelo método do ponto fixo definido na alínea anterior, tomando $x_0 = 1$.

   (d) **[2.0 val.]** Determine o número de iterações que lhe permitiriam garantir uma aproximação com erro absoluto inferior a 10^{-6}. Não é necessário calcular essas iterações.

3. **[3.0 val.]** Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$, onde
   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) **[1.5 val.]** Calcule a fatorização $A = LU$.

   (b) **[1.5 val.]** Resolva o sistema linear, usando a fatorização obtida na alínea anterior.

4. **[4.0 val.]** Escreva uma rotina Octave implementando o método da bissecção para a resolução de equações não lineares do tipo $f(x) = 0$. Os dados de entrada deverão ser a função f, as constantes a_0 e b_0, definindo o intervalo inicial $I_0 = [a_0, b_0]$ onde se deve aproximar a raíz e um parâmetro ϵ definindo um critério de paragem do tipo $|b_k - a_k| \leq \epsilon$. Pode assumir que existe uma e uma só raíz de $f(x) = 0$ no intervalo $[a_0, b_0]$. Aplique a rotina para obter uma aproximação da raíz de (1) da questão 2, com $I_0 = [0, 1]$ e $\epsilon = 10^{-5}$.

5. **[4.0 val.]** Escreva uma rotina Octave que dada uma matriz quadrada A devolva as matrizes L e U da fatorização $A = LU$. Pode assumir que todos os elementos pivot serão não nulos, pelo que não será necessário efetuar trocas de linhas. Não poderá usar rotinas já definidas no Octave para o cálculo da fatorização $A = LU$. Aplique a rotina ao exemplo da alínea 3a).

FIM