p-Fólio

U.C. 21002
Álgebra Linear I

26 de julho de 2019

- O p-fólio é composto por **5** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II** a **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**
1.5 val.	3 val.	3 val.	1.5 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Então:

- ☐ a) A não é invertível.
- ☐ b) $\det A = 24$.
- ☐ c) $\det(2A) = 24$.
- ☐ d) $\det(-A) = -\det A$.

Questão 2

Seja A uma matriz quadrada tal que $A^2 = 5A$. Então:

- ☐ a) $\det A = 5$.
- ☐ c) A é invertível.
- ☐ b) 0 ou 5 são valores próprios de A.
- ☐ d) $\det A = 1$.

Questão 3

Seja F o subespaço linear de $\mathbb{R}^4$ definido por
$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z - w = 0 \wedge x + y + 3z = 0\}$. Então:

- ☐ a) $\dim F = 3$.
- ☐ b) $((2, -2, 0, 2), (2, 1, -1, 0))$ é uma base de F.
- ☐ c) $(1, 3 - 2, -4) \in F$.
- ☐ d) $F = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $A^2 - 2A = I_n$ então 2 é valor próprio de A.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

c) Mostre que existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

IV. Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x+y & y-z \\ x+z & x+y \end{pmatrix}$.

a) Determine o núcleo de T.

b) Determine a dimensão da imagem de T.

c) Considerando as bases canónicas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ determine a matriz que representa T.

V. Sejam A e $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis. Mostre que $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.
(Recorde que se X é uma matriz invertível então $X^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} X}{\det X}$)

FIM