E-Fólio B - Resolução

1. Prove por indução, que $\sum_{j=1}^{2n} j^2 = \frac{(4n+1)(2n+1)n}{3}$, $\forall n = 1, 2, 3, ...$

   Vamos provar esta igualdade por indução matemática em n. Começamos, pela base de indução, correspondente ao caso $n = 1$, para o qual temos

$$\sum_{j=1}^{2\times 1} j^2 = \sum_{j=1}^{2} j^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5.$$

   Por outro lado, o segundo membro da igualdade que pretendemos provar conduz a

$$\frac{(4\times 1+1)(2\times 1+1)\times 1}{3} = \frac{(4+1)(2+1)}{3} = \frac{5\times 3}{3} = 5.$$

   Então

$$\sum_{j=1}^{2\times 1} j^2 = 5 = \frac{(4\times 1+1)(2\times 1+1)\times 1}{3},$$

   pelo que o caso $n = 1$ conduz a uma proposição verdadeira. Vamos agora assumir a hipótese de indução, ou seja que, para um dado $n \in \mathbb{N}_1$, temos

$$\sum_{j=1}^{2n} j^2 = \frac{(4n+1)(2n+1)n}{3} \tag{1}$$

   e pretendemos provar que

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} j^2 = \frac{(4(n+1)+1)(2(n+1)+1)(n+1)}{3}.$$

   Temos

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} j^2 = \sum_{j=1}^{2n+2} j^2 = \left(\sum_{j=1}^{2n} j^2\right) + (2n+1)^2 + (2n+2)^2,$$

   e usando a hipótese de indução (1), temos

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} j^2 = \frac{(4n+1)(2n+1)n}{3} + (2n+1)^2 + (2n+2)^2 =$$

$$\frac{(8n^2+2n+4n+1)n}{3} + 4n^2 + 1 + 4n + 4n^2 + 4 + 8n = \frac{8n^3+6n^2+n+24n^2+36n+15}{3} =$$

$$\frac{8}{3}n^3 + 10n^2 + \frac{37}{3}n + 5. \tag{2}$$

Por outro lado,

$$\frac{(4(n+1)+1)(2(n+1)+1)(n+1)}{3} = \frac{(4n+5)(2n+3)(n+1)}{3} =$$

$$\frac{(8n^2+10n+12n+15)(n+1)}{3} = \frac{(8n^2+22n+15)(n+1)}{3} =$$

$$\frac{8n^3+22n^2+15n+8n^2+22n+15}{3} = \frac{8}{3}n^3+10n^2+\frac{37}{3}n+5. \tag{3}$$

Como as expressões a que chegámos em (2) e em (3) são iguais, concluímos que

$$\sum_{j=1}^{2(n+1)} j^2 = \frac{(4(n+1)+1)(2(n+1)+1)(n+1)}{3},$$

como pretendíamos provar. Logo, $\displaystyle\sum_{j=1}^{2n} j^2 = \frac{(4n+1)(2n+1)n}{3}$, $\forall n = 1, 2, 3, ...$

2. Considere a seguinte sucessão:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \quad n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

(a) Prove que x_n é uma sucessão crescente.

Iremos provar que x_n é uma sucessão crescente, por indução matemática em n. Comecemos pela base da indução, provando que $x_1 \geq x_0$. De facto, temos $x_1 = \sqrt{1+x_0} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} > 1 = x_0$, logo temos $x_1 \geq x_0$, como pretendíamos provar. Agora assumimos a hipótese de indução, ou seja que, para um dado $n \in \mathbb{N}_1$ temos $x_{n-1} \leq x_n$ e pretendemos provar que $x_n \leq x_{n+1}$. Temos, pela definição da sucessão x_n que

$$x_n = \sqrt{1+x_{n-1}} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}.$$

Agora, pela hipótese de indução, temos $x_{n-1} \leq x_n$ e isto implica que

$$1+x_{n-1} \leq 1+x_n \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1+x_{n-1}}}_{x_n} \leq \underbrace{\sqrt{1+x_n}}_{x_{n+1}},$$

porque a função $f(x) = \sqrt{x}$, definida para $x > 0$, é uma função crescente (basta notar que $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, desde que $x > 0$). Então provámos que $x_n \leq x_{n+1}$, pelo que a sucessão x_n é crescente.

(b) Prove que $x_n \leq 3$, $\forall n = 0, 1, 2....$

Novamente por indução verificamos imediatamente a base de indução (caso $n = 0$), pois

$$x_0 = 1 \leq 3$$

é uma proposição verdadeira. Agora assumimos por hipótese de indução que para um dado $n \in \mathbb{N}$, temos $x_n \leq 3$ e pretendemos provar que isso implica que também $x_{n+1} \leq 3$. Temos, uma vez que a função $f(x) = \sqrt{x}$ definida na alínea anterior é crescente, e usando a hipótese de indução,

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \leq \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \leq 3,$$

logo $x_{n+1} \leq 3$, como pretendíamos provar. Logo, $x_n \leq 3$, $\forall n = 0, 1, 2....$

(c) Prove que x_n é convergente e calcule o seu limite.

Pela alínea a), como a sucessão é crescente temos

$$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$$

e pela alínea b) sabemos que $x_n \leq 3,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq 3,$$

logo todos os termos da sucessão x_n pertencem ao intervalo $[1, 3]$, pelo que a sucessão é limitada. Como x_n é monótona crescente, pela alínea a), então é uma sucessão convergente, pelo que existe $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Chamemos X a este limite. Sabemos que $\lim_{n\to+\infty} x_n = X$ o que implica que também $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = X$. Então, da definição da sucessão x_n resulta que

$$x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \Rightarrow X = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1 + \lim_{n\to+\infty} x_n} = \sqrt{1+X},$$

pelo que

$$X = \sqrt{1+X} \Rightarrow X^2 = \left(\sqrt{1+X}\right)^2 = 1 + X,$$

visto que $1 + X \geq 0$. Então X é solução de

$$X^2 - X - 1 = 0 \iff X = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \iff X = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee X = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ e sabemos que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[1, 3]$, em particular também o limite da sucessão pertence a esse intervalo, pelo que temos

$$X = \lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

3. Considere a função $\dfrac{(x^2-1)\sqrt{x+7}}{x+6}$.

(a) Determine o domínio de f.

A função f pode ser definida como a divisão $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, onde $g(x) = (x^2-1)\sqrt{x+7}$ e $h(x) = x + 6$, portanto

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_g,\ x \in D_h \text{ e } h(x) \neq 0\}.$$

Temos que

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} : x + 7 \geq 0\} = [-7, +\infty[.$$

Por outro lado, $D_h = \mathbb{R}$ e

$$h(x) = 0 \iff x + 6 = 0 \iff x = -6,$$

logo

$$D_f = [-7, +\infty[\setminus \{-6\}.$$

(b) Prove por definição que f é diferenciável no ponto $x = 1$ e calcule $f'(1)$.

Notamos que o ponto $x = 1$ pertence ao domínio da função f. Calculemos o seguinte

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{(x^2-1)\sqrt{x+7}}{x+6} - \frac{(1-1)\sqrt{1+7}}{1+6}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{(x^2-1)\sqrt{x+7}}{x+6}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{(x-1)(x+1)\sqrt{x+7}}{x+6}}{x-1}.$$

Notamos que o cálculo deste limite conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Como o limite no depende do valor da expressão em $x = 1$, podemos fazer o corte do factor $(x-1)$, por este não se anular e obtemos

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\sqrt{x+7}}{x+6} = \frac{2\sqrt{8}}{7}.$$

Como este limite existe, então f é diferenciável no ponto $x = 1$ e temos $f'(1) = \dfrac{2\sqrt{8}}{7}$.

(c) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.

Pela alínea anterior f é diferenciável no ponto $x = 1$ e temos $f'(1) = \dfrac{2\sqrt{8}}{7}$. Então a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$ é

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{(1-1)\sqrt{8}}{7} + \frac{2\sqrt{8}}{7}(x-1) = \frac{2\sqrt{8}}{7}(x-1).$$

4. Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin(\pi x)}{(e^{5x}-1)^2}.$$

Este limite conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Tentando levantá-la usando a regra de Cauchy deveremos estudar o limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^2\sin(\pi x))'}{\left[(e^{5x}-1)^2\right]'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\pi x) + \pi x^2\cos(\pi x)}{2\left(e^{5x}-1\right) \times 5e^{5x}}$$

que conduz novamente a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Tentando novamente levantar a indeterminação, usando a regra de Cauchy, vamos estudar o

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(2x\sin(\pi x) + \pi x^2\cos(\pi x)\right)'}{\left(2\left(e^{5x}-1\right) \times 5e^{5x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(\pi x) + 2\pi x\cos(\pi x) + 2\pi x\cos(\pi x) - \pi^2 x^2\sin(\pi x)}{10\left[5e^{5x} \times e^{5x} + 5\left(e^{5x}-1\right)e^{5x}\right]} =$$

$$\frac{2\sin(\pi\times 0) + 2\pi\times 0\cos(\pi\times 0) + 2\pi\times 0\cos(\pi\times 0) - \pi^2\times 0^2\sin(\pi\times 0)}{10\left[5e^{5\times 0} \times e^{5\times 0} + 5\left(e^{5\times 0}-1\right)e^{5\times 0}\right]} =$$

$$\frac{0}{10\times 5} = 0.$$

Como este limite existe, então, pela regra de Cauchy também existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin(\pi x) + \pi x^2\cos(\pi x)}{2\left(e^{5x}-1\right) \times 5e^{5x}}$$

e este limite é igual a zero. Novamente, pela regra de Cauchy, também existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\pi x)}{(e^{5x}-1)^2}$$

e temos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\pi x)}{(e^{5x}-1)^2} = 0.$$

5. Prove que a função $f(x) = \sin(2x)\cos(x) - 4x + 3$ tem uma e uma só raiz em $\mathbb{R}$.

   Antes de mais verificamos que $\sin(2x)$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a composição da função polinomial $2x$ com a função $\sin(x)$, que sabemos serem ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Como a função $\cos(x)$ é diferenciável, então a função $\sin(2x)\cos(x)$ também é diferenciável, pois é o produto de funções diferenciáveis. Então, a função f diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a soma da função polinomial $-4x+3$ com a função $\sin(2x)\cos(x)$, que são ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e, sendo diferenciável em $\mathbb{R}$, é também contínua em $\mathbb{R}$.

   Agora notamos que $f(0) = \sin(2\times 0)\cos(0) - 4\times(0) + 3 = 3 > 0$ e $f(2) = \sin(2\times 2)\cos(2) - 4\times 2 + 3 = \sin(4)\cos(2) - 5 < 0$, pois $\sin(4)\cos(2) < 1$ o que implica que $\sin(4)\cos(2) - 5 < 1 - 5 = -4 < 0$. Então, a função f (que é contínua em $\mathbb{R}$) muda de sinal no intervalo $]0,2[$, pelo que o teorema de Bolzano garante a existência de pelo menos uma raíz nesse intervalo. Temos agora que

$$f'(x) = 2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) - 4$$

   e como $2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \leq |2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)|$, temos

$$f'(x) \leq |2\cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x)| - 4 \leq 2\times\underbrace{|\cos(2x)|}_{\leq 1}\underbrace{|\cos(x)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\sin(2x)|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1} - 4 \leq$$

$$2 + 1 - 4 = -1 < 0,$$

   logo $f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Então concluímos que a função f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, pelo que tem no máximo uma raíz real. Concluímos, portanto, que f tem uma única raiz em $\mathbb{R}$ e que esta pertence ao intervalo $[0,2]$.