Exame de 18/02/2021 - Proposta de resolução

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) **[2.5 val.]**
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\cos(5e^x)}{x^5+x+5}.$$
Temos
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\cos(5e^x)}{x^5+x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x^5}-\frac{\cos(5e^x)}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{x}{x^5}+\frac{5}{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{\cos(5e^x)}{x^5}}{1+\frac{1}{x^4}+\frac{5}{x^5}}.$$
Agora notamos que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}=0,\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4}=0 \text{ e também } \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^5}=0.$$
Finalmente, para todo $x>0$, temos
$$-1\le \cos(5e^x)\le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^5}\le \frac{\cos(5e^x)}{x^5}\le \frac{1}{x^5}$$
e como
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^5}=0 \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x^5}\right)=0$$
pelo teorema dos limites enquadrados, concluímos que
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(5e^x)}{x^5}=0$$
e, portanto
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-\cos(5e^x)}{x^5+x+5}=\frac{0}{1}=0.$$

   (b) **[2.5 val.]**
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)\,(1-e^{x-2})}.$$
Notamos que a substituição directa de x por 2 no numerador e denominador, conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. O numerador $x^3+x^2-16x+20$ é uma função polinomial, pelo que é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Da mesma forma, também $(x-2)$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial. Também $(1-e^{x-2})$ é infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é a

soma de duas funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ - uma função constante e a composição de uma função polinomial $(x-2)$ com a função exponencial, ambas infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Assim, o denominador, sendo definido com o produto de duas funções infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R},$ é também uma função infinitamente diferenciável em $\mathbb{R}$. Portanto podemos aplicar a regra de Cauchy, para tentar levantar a indeterminação. Agora notamos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(x^3+x^2-16x+20\right)'}{\left((x-2)\left(1-e^{x-2}\right)\right)'} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{1-e^{x-2}-e^{x-2}(x-2)}$$

e a substituição directa de x por 2 no numerador e denominador conduz novamente a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Notando novamente que por um argumento análogo ao usado no passo anterior, podemos provar que tanto o numerador como o denominador definem funções diferenciáveis, pelo que podemos tentar novamente aplicar a regra de Cauchy e temos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{\left(3x^2+2x-16\right)'}{\left(1-e^{x-2}-e^{x-2}(x-2)\right)'} &= \lim_{x\to 2} \frac{6x+2}{-e^{x-2}-e^{x-2}(x-2)-e^{x-2}} \\ &= \frac{2\times 6+2}{-1-1\times 0-1} = -\frac{14}{2} = -7.\end{aligned}$$

Como este limite existe, pela regra de Cauchy concluímos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-16x+20}{(x-2)\left(1-e^{x-2}\right)}$$

existe e é igual a -7.

Outra abordagem de resolução:

Tal como na abordagem anterior, começamos por reparar que a substituição directa de x por 2 no numerador e denominador, conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$, ou seja 2 é uma raiz dos polinómios em numerador e denominador. Podemos factorizar o polinómio do numerador, por exemplo, recorrendo à regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & 1 & -16 & 20 \\ 2 & & 2 & 6 & -20 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & 0 \end{array}$$

ou seja, obtemos que $x^3 + x^2 - 16x + 20 = (x-2)(x^2+3x-10)$.
Então

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)\left(1-e^{x-2}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+3x-10)}{(x-2)\left(1-e^{x-2}\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{1-e^{x-2}}$$

A substituição directa de x por 2 neste último limite conduz novamente a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos novamente aplicar a regra de Cauchy a este limite, como foi feito na primeira abordagem, mas desta vez aplicando a regra de Cauchy apenas uma vez para concluir que o limite é igual a -7.

2. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(3x)x + 3}{x^4 + x^2 + 1} & x < 0 \\ \\ x^3 + x + e^{2x} + 3 & x \geq 0. \end{cases}$$

(a) **[2.5 val.]** Estude a continuidade de f.

Comecemos por analisar o caso $x < 0$. Temos que $\cos(3x)$ é uma função contínua, pois é a composição de função cosseno com um polinómio, ambas funções contínuas. Assim, o numerador, sendo a soma de duas funções contínuas (a função $\cos(3x)x$ que é o produto de duas funções contínuas, portanto função contínua e uma função constante que é contínua), é também uma função contínua. O denominador é uma função polinomial, pelo que é contínua. Por outro lado, sabemos que o denominador nunca se anula, pois

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \text{ e } x^4 \geq 0 \Rightarrow x^4 + x^2 + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1 > 0.$$

Então, como a divisão de duas funções contínuas é uma função contínua, desde que o denominador não se anule, podemos concluir que f é contínua em $\mathbb{R}^-$.

Para $x > 0$ temos que f resulta da soma de uma função polinomial, com a composição da função exponencial e o polinómio $2x$, pelo que é uma função contínua.

Finalmente, para averiguar a continuidade de f no ponto de mudança de troço, $x = 0$, devemos estudar os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \text{ e } \lim_{x\to 0^-} f(x).$$

Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x^3 + x + e^{2x} + 3\right) = 0 + 0 + e^0 + 3 = 4$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{0+3}{0+0+1}\right) = 3.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x),$$

concluímos que a função f não é contínua no ponto $x = 0$. Então f é contínua em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$, sendo descontínua no ponto $x = 0$.

(b) **[2 val.]** Defina a função derivada de f, designada por f', no maior conjunto onde esta puder ser definida.

A função f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. A justificação detalhada segue os mesmos passos que justificam a continuidade de f para $x < 0$ e para $x > 0$, (ver alínea anterior) essencialmente por resultar de somas, produtos, composição e divisão de funções diferenciáveis, onde o denominador não se anula. Como a função f não é contínua no ponto $x = 0$, concluímos que f não é diferenciável no ponto $x = 0$. Temos para $x > 0$, que

$$f'(x) = \left(x^3 + x + e^{2x} + 3\right)' = 3x^2 + 1 + 2e^{2x}$$

e para $x < 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\cos(3x)x + 3}{x^4 + x^2 + 1}\right)' \\ &= \frac{(-3\sin(3x)x + \cos(3x))\left(x^4 + x^2 + 1\right) - \left(4x^3 + 2x\right)(\cos(3x)x + 3)}{\left(x^4 + x^2 + 1\right)^2} \end{aligned}$$

Então temos

$$f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(-3\sin(3x)x+\cos(3x))\left(x^4+x^2+1\right)-\left(4x^3+2x\right)(\cos(3x)x+3)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2} & x < 0 \\ \\ 3x^2 + 1 + 2e^{2x} & x > 0. \end{cases}$$

3. **[3 val.]** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e com (pelo menos) três raízes distintas, isto é, existem $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ tais que $z_1 < z_2 < z_3$ e $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3) = 0$. Prove que f'' tem pelo menos uma raíz real.

Notamos que f é duas vezes diferenciável, pelo que, em particular é diferenciável. Como $f(z_1) = f(z_2)$, pelo teorema de Rolle, existe $c_1 \in]z_1, z_2[$ tal que $f'(c_1) = 0$. Da mesma forma, como $f(z_2) = f(z_3)$, concluímos que existe $c_2 \in]z_2, z_3[$ tal que $f'(c_2) = 0$. Sabemos também que $c_1 < c_2$ porque $c_1 \in]z_1, z_2[$ e $c_2 \in]z_2, z_3[$. Então, como $f'(c_1) = f'(c_2)$ e a função f é duas vezes diferenciável, novamente pelo teorema de Rolle, concluímos que existe $c_3 \in]c_1, c_2[$ tal que $f''(c_3) = 0$, ou seja f'' tem pelo menos uma raíz real, como se pretendia provar.

4. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real, apresentando o resultado da forma simplicada:

   (a) **[2 val.]** $x^5 - xe^{-x^2} + 5\cos(3x) + 5$.
   Temos

$$\begin{aligned}
&\int \left(x^5 - xe^{-x^2} + 5\cos(3x) + 5\right) dx \\
&= \int x^5 dx - \int xe^{-x^2} dx + \int 5\cos(3x) dx + \int 5 dx \\
&= \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2}\int (-2x)e^{-x^2} dx + \frac{5}{3}\int 3\cos(3x) dx + 5x \\
&= \frac{x^6}{6} + \frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{5}{3}\sin(3x) + 5x + C,\ C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   (b) **[2.5 val.]** $(5x^2 - 2x + 1)e^{4x}$.
   Temos

$$\begin{aligned}
&\int (5x^2 - 2x + 1)e^{4x} dx = \\
&5\int x^2 e^{4x} dx - 2\int xe^{4x} dx + \int e^{4x} dx = \\
&5\int x^2 e^{4x} dx - 2\int xe^{4x} dx + \frac{1}{4}\int 4e^{4x} dx = \\
&5\int x^2 e^{4x} dx - 2\int xe^{4x} dx + \frac{1}{4}e^{4x}
\end{aligned}$$

   Vamos calcular $\int xe^{4x} dx$ fazendo integração por partes. Temos

$$\int xe^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4}x - \int \frac{e^{4x}}{4} dx = \frac{e^{4x}}{4}x - \frac{e^{4x}}{16}. \tag{1}$$

Também, por integração por partes, temos

$$\int x^2 e^{4x} dx = \frac{e^{4x}}{4}x^2 - \int \frac{e^{4x}}{4} 2x dx = \frac{e^{4x}}{4}x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} x dx =$$

$$\frac{e^{4x}}{4}x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{4x}}{4}x - \frac{e^{4x}}{16}\right) = \frac{e^{4x}}{4}x^2 - \frac{1}{8}e^{4x}x + \frac{e^{4x}}{32}$$

usando (1).

Então,

$$\int (5x^2 - 2x + 1)e^{4x} dx = 5\left(\frac{e^{4x}}{4}x^2 - \frac{1}{8}e^{4x}x + \frac{e^{4x}}{32}\right) - 2\left(\frac{e^{4x}}{4}x - \frac{e^{4x}}{16}\right) + \frac{1}{4}e^{4x} + C,\ C \in \mathbb{R} =$$

$$\frac{5}{4}e^{4x}x^2 - \frac{9}{8}e^{4x}x + \frac{17}{32}e^{4x} + C, C \in \mathbb{R}.$$

Outra abordagem de resolução:

Em alternativa à resolução apresentada, poderíamos ter calculado a primitiva que era pedida fazendo primitivação por partes, tomando as seguintes escolhas

$$\underbrace{(5x^2 - 2x + 1)}_{v(x)} \underbrace{e^{4x}}_{u'(x)}.$$

5. **[3 val.]** Seja

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & x < 3 \\ \\ \cos(3x) + 8e^{-3x} + 6 & x \geq 3. \end{cases}$$

Calcule a área do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cujas coordenadas satisfazem as seguintes condições

$$1 \leq x \leq 5, \qquad 0 \leq y \leq f(x),$$

apresentando o resultado de forma simplificada.

Temos que

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2},$$

pelo que o polinómio $p(x) := x^2 - 2x + 3$ não tem zeros reais.

Uma resolução alternativa para verificar que $p(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, evitando recorrer à fórmula resolvente, seria notar que $x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 \geq 2 > 0.$

A função p é diferenciável em $\mathbb{R}$, pois é uma função polinomial. Como o coeficiente em x^2 é positivo, então o gráfico desta função polinomial é uma parábola com a concavidade voltada para cima e o ponto de mínimo é o zero da derivada do polinómio, ou seja, satisfaz

$$2x-2=0 \iff x=1.$$

Temos $p(1) = 1-2+3 = 2 > 0$, pelo que $p(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Notamos agora que

$$-1 \leq \cos(3x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$e^{-3x} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Então, para $x \geq 3$, temos $f(x) \geq -1+0+6 = 5 > 0,$ pelo que $f(x) > 0,\ \forall x \geq 3$. Então a área da região

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

é dada por

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^5 f(x)dx =$$

$$\int_1^3 \left(x^2-2x+3\right) dx + \int_3^5 \left(\cos(3x)+8e^{-3x}+6\right) dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{8}{3}e^{-3x} + 6x\right]_3^5 =$$

$$9-9+9-\frac{1}{3}+1-3+\frac{1}{3}\sin(15)-\frac{8}{3}e^{-15}+30-\frac{1}{3}\sin(9)+\frac{8}{3}e^{-9}-18 =$$

$$\frac{56}{3} + \frac{8(e^6-1)}{3e^{15}} + \frac{\sin(15)-\sin(9)}{3}.$$

Proposta de resolução da questão 3 do e-fólio global

Seja g uma função diferenciável em $\mathbb{R}$. Prove que

$$\int g(x)dx = xg(x) - \int xg'(x)dx.$$

A igualdade pretendida pode ser obtida directamente usando a regra de integração por partes: Sendo u e v duas funções diferenciáveis, então

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Tomamos $u(x) = x$ e $v(x) = g(x)$, que são ambas funções diferenciáveis (g é diferenciável por hipótese do problema e u é uma função polinomial, portanto diferenciável) e temos $u'(x) = 1,$ pelo que

$$\int \underbrace{1}_{u'(x)} . \underbrace{g(x)}_{v(x)} dx = \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{g(x)}_{v(x)} - \int \underbrace{x}_{u(x)} \underbrace{g'(x)}_{v'(x)} dx,$$

ou seja,

$$\int g(x)dx = xg(x) - \int xg'(x)dx$$

como se pretendia provar.

FIM