



ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

Período de Realização

Decorreu no dia 7 de junho de 2024

Proposta de Resolução

1 Considere 3 urnas com bolas. A urna A contém 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. A urna B contém 8 bolas brancas e 2 bolas pretas. A urna C contém 5 bolas brancas e 5 bolas pretas.

Uma bola é retirada da urna A.

Se a bola retirada da urna A for branca, então é retirada uma bola da urna B. Mas se a bola retirada da urna A for preta, então é retirada uma bola da urna C.

a) Considere os seguintes eventos:

- E_A o evento em que a primeira bola retirada da urna A é branca;
- E_B o evento em que a primeira bola retirada da urna B é branca;
- E_C o evento em que a primeira bola retirada da urna C é branca;

Faça as ligações corretas:

$$P(E_A) = 2/5$$

$$P(E_B) = 4/5$$

$$P(E_C) = 1/2$$

b) Qual a probabilidade de ser retirada uma bola branca na segunda urna?

- 31/50*
- 8/50
- 12/50
- 27/50

(Resolução)

Seja F o evento em questão, então

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|E_A)P(E_A) + P(F|\bar{E}_A)P(\bar{E}_A) = P(E_B)P(E_A) + P(E_C)P(\bar{E}_A) \\ &= 31/50 \end{aligned}$$

c) Calcule a probabilidade de uma bola preta ser retirada da segunda urna, sabendo que foi retirada uma bola branca da urna A.

- 5/25*
- 2/25
- 8/25
- 3/25

(Resolução)

$$P(\bar{F}|E_A) = P(\bar{E}_B) = 1/5$$

2. Uma menina distribui 10 pedaços de pão pelos seus dois patos (um pato holandês e um pato real). Para cada pedaço de pão a probabilidade de ser comido pelo pato real é $1/3$.

Seja X a variável aleatória número de pedaços de pão que são comidos pelo pato real.

a) Qual a distribuição de X ?

- $Bin(10, 2/3)$
- $Bin(10, 1/3)^*$
- $Bin(10, 3/10)$

(Resolução)

Seja E_i o evento do i -ésimo pedaço de pão ser comido pelo pato real.

$$P(E_i) = 1/3$$

$$X = E_1 + E_2 + \dots + E_{10}$$

Portanto $X \sim Bin(10, 1/3)$.

b) Qual das seguintes opções está correta?

- $E(X) = 20/9$ e $Var(X) = 20/6$
- $E(X) = 20/6$ e $Var(X) = 10/3$
- $E(X) = 10/3$ e $Var(X) = 20/9^*$

(Resolução)

Como $X \sim Bin(10, 1/3)$, $E(X) = np = 10 \times 1/3 = 10/3$ e
 $Var(X) = np(1 - p) = 10 \times 1/3 \times 2/3 = 20/9$

3. O verdadeiro peso de sacos de um kilo de chocolate da fábrica de chocolate ChocoBom é aleatório e apresenta uma função de densidade de probabilidade uniformemente distribuída entre 0,8 Kg e 1,05 Kg:

$$f(x) = \begin{cases} k & 0,8 < x < 1,05 \\ 0 & \text{outros valores} \end{cases}$$

- a) Determine o valor de k .

(Resolução)

k terá de ser tal que $f(x) \geq 0 \forall x \Rightarrow k > 0$ **(Cotação: 20%)**

e:

$$\int f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{0,8}^{1,05} kdx = kx \Big|_{0,8}^{1,05} = k(1,05 - 0,8) = 1$$

(Cotação: 60%)

donde

$$k = \frac{1}{1,05 - 0,8} = \frac{1}{0,25} = 4$$

(Cotação: 20%)

- b) Qual o peso médio dos sacos de chocolate nesta fábrica?

(Resolução)

$$E(X) = \int xf(x)dx = \int_{0,8}^{1,05} 4xdx = 2x^2 \Big|_{0,8}^{1,05} = 2,205 - 1,28 = 0,925$$

O peso médio dos sacos é de 0,925 Kg.

(Cotação: 20% para a definição e 80% para a determinação)

- c) Qual a probabilidade de um saco de chocolate pesar menos de um kilo?

Resposta:

(Resolução)

$$P(X < 1) = \int_{0,8}^1 4dx = 4x \Big|_{0,8}^1 = 0,8$$

A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 3 grupos de questões é a seguinte:

Questão	1a)	1b)	1c)	2a)	2b)	3a)	3b)	3c)
Cotação	1.0	1.5	1.0	1.5	1.5	2.0	2.0	1.5

FIM