UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21180

Computação Numérica

16 de julho de 2019

INSTRUÇÕES

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução da prova.
- O enunciado da prova é constituído por 4 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Se o seu exemplar não estiver completo ou nele se verificar qualquer outra deficiência, por favor dirija-se ao professor vigilante.
- A prova deve ser resolvida na sua totalidade em folhas de respostas.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível.
- Todas as respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- A prova é SEM CONSULTA. Todos os elementos necessários à resolução são fornecidos no enunciado.
- Para a execução da prova é INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- As cotações são indicadas por grupo e nas próprias questões.
- As respostas devem ser claras, indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Nas questões de escrita de programas, a sua correção terá em conta critérios de proficiência e compreensibilidade do código (legibilidade, indentação, estrutura, comentários e explicação geral).
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização da prova é de 150 minutos.

Grupo I [4 valores]

1.1. [1.5] Calcule o polinómio de Taylor com 2 termos não nulos da função $f(x) = x \cos x$ para $x \in [-\pi/5, \pi/5]$. Utilize $x_0 = 0$.

1.2. [1.5] Calcule o erro da aproximação polinomial obtida na alínea 1.1.

1.3. [1] Recorrendo à aproximação polinomial obtida na alínea 1.1 calcule uma aproximação $\bar{f}$ de $f(\pi/5)$. Calcule o respetivo erro e verifique se está de acordo com o erro estimado na alínea 1.2.

Grupo II [4 valores]

2. Considere a seguinte equação (x em radianos),

$$\sin x = \cos x$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo [0, 1].

2.2. [2] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando quatro iterações do método da bissecção, a partir do valor inicial $a_0 = 0, b_0 = 1$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, a_k, b_k, x_k, f(x_k)$, sinais de $f()$, para $k = 0, 1, 2, 3$.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

2.4. [0.5] Indique quantas iterações seriam necessárias para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-4}.

Grupo III [4 valores]

3. Considere a matriz A e o vetor b seguintes,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Determine a fatorização LU de A.

3.2. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ com $x = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ utilizando a fatorização encontrada na alínea anterior. Justifique os passos seguidos na resolução.

Grupo IV [8 valores]

4.1. [1.5] Apresente um pequeno programa em Octave que crie a matriz A a partir da concatenação de vetores e/ou matrizes. Utilize os operadores e funções que achar necessários para a sua criação (não devem ser criados elemento a elemento).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.2. [1.5] Considere as funções $f(x) = \ln(1+x)$ e $g(x) = \sin(3x + \pi/2)$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções $f(x)$ e $g(x)$, com $f(x)$ para x de 0 a 2 com intervalos de 0.02, $g(x)$ para x de 1 a 2 com intervalos de 0.04 e com as seguintes características:

- $f()$ a traço contínuo de cor verde, com legenda;
- $g()$ a ponteado de cor preta, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (1, 1) deve ser assinalado com um marcador tipo bola, de cor azul;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta "x";
- o eixo das ordenadas deve ter a etiqueta "$f(x), g(x)$".

4.3. [5] Escreva uma função em Octave `[x1,x2]=poliraiz01(a,b,c)` que dado um polinómio de 2º grau $ax^2 + bx + c$ com raízes reais calcule as suas raízes por um método estável, ou seja, tendo em conta a possibilidade de ocorrência de cancelamento subtrativo quando $|b| \gg |4ac|$. No caso de o polinómio dado ter raízes complexas, a função deve emitir uma mensagem de aviso e retornar a matriz vazia em `x1` e `x2`.

FORMULÁRIO

Fatorização $A = LU$

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/u_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}u_{k,j} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k}u_{k,i})/u_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fatorização (Cholesky) $A = LL^T$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}l_{j,k})/l_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L(x_i)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]$$

$$\cdot(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

FIM