UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002
Álgebra Linear I

30 de janeiro de 2013

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

Questão 1

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $B_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \alpha \end{bmatrix}^\top \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$. Considere as afirmações seguintes:

(i) A_α é invertível se e só se $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -2$.

(ii) O sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ é possível, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ é solução do sistema $A_\alpha X = B_\alpha$ para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.

☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.

☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

☒ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2

Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, dada por $f(x, y, z, w) = (x, y, z, w)$. Então:

☐ **a)** 0 é valor próprio de f.

☐ **b)** $(0, 0, 0, 1)$ não é vetor próprio de f.

☒ **c)** $f = f^2$.

☐ **d)** Não existe uma base de $\mathbb{R}^4$ formada só por vetores próprios de f.

Questão 3

Considere os subespaços de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$F = \langle 1, x^3, x^2 + x \rangle,$$
$$G = \langle 1 + x^3, 1 + x \rangle.$$

Então:

- ☐ **a)** $\dim(F + G) = 5$.
- ☒ **b)** $\dim(F + G) = 4$.
- ☐ **c)** $\dim(F \cap G) = 0$.
- ☐ **d)** $\dim F = 2$.

Questão 4

Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 1 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $|A_\beta|$ o determinante de A_β.

Então:

- ☒ **a)** $|A_\beta| = \beta$.
- ☐ **b)** $|A_\beta| = \beta^2 - \beta$.
- ☐ **c)** $|A_\beta| = 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$.
- ☐ **d)** $|A_\beta| = 2\beta$.

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que o seu polinómio característico é $p_A(z) = z(z-1)(z-2)$. Então, A é uma matriz invertível.

b) Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xyz = 0\}$. Então, $\mathcal{F}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

IV. Considere a aplicação linear $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{cases} f(1,0,1) = & (1,2,3) \\ f(1,0,0) = & (3,-1,0) \\ f(0,1,1) = & (1,1,0). \end{cases}$$

a) Determine a expressão geral da aplicação f.

b) Determine a matriz $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ que representa f relativamente à base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ na partida e na chegada.

c) Defina os subespaços $\operatorname{Nuc} f$ e $\operatorname{Im} f$. Determine uma base para $\operatorname{Nuc} f$ e determine uma base para $\operatorname{Im} f$.

d) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua uma base de $\operatorname{Im} f$.

V. Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma qualquer matriz $n \times n$ de elementos reais. Considere as matrizes $A_s = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)$ e $A_a = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)$, designadas, respetivamente, por parte simétrica, e parte anti-simétrica, de A.

a) Mostre que A_s é uma matriz simétrica e que A_a é uma matriz anti-simétrica.

b) Mostre que A_s e A_a comutam se, e só se, A e $A^\top$ comutam.

c) Relacione entre si os traços de A, A_s e A_a. (Recorde que o traço de uma matriz B é definido por $\operatorname{Tr} B = \sum_{j=1}^{n} B_{jj}$.)

FIM

Resolução

As resoluções que se seguem são feitas com algum detalhe, por vezes maior que o necessário, de modo a que possam constituir úteis materiais de aprendizagem. Em particular, nas questões de escolha múltipla, onde apenas era necessário indicar a opção correta, apresentam-se, também, os cálculos necessários à sua obtenção.

I.

1. Usando a primeira linha (por exemplo) para calcular o determinante obtemos

$$|A_\alpha| = (12 - \alpha^2) - 8 = 4 - \alpha^2 = (2-\alpha)(2+\alpha),$$

e como A_α é invertível se e só se $|A_\alpha| \neq 0$, podemos concluir que a alínea i) é verdadeira.

Para a alínea ii) já sabemos que no caso em que $\alpha \neq \pm 2$ a matriz é invertível e portanto o sistema tem sempre solução, e é única. Para o caso $\alpha = \pm 2$ o sistema tem solução desde que a caracteristíca da matriz aumentada seja a mesma qua a característica da matriz A_α. Tanto para $\alpha = -2$ como para $\alpha = -2$ é fácil ver que tanto a matriz A_α como a matriz aumentada têm característica igual a 2, e portanto o sistema tem sempre solução.

A alínea iii) também é verdadeira pois tem-se

$$A_\alpha X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & \alpha \\ 0 & \alpha & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \alpha \end{bmatrix} = B_\alpha$$

A opção correta é portanto a opção d).

Nota: *Para quem reparasse que o vetor B_α era uma das colunas da matriz, as alíneas ii) e iii) eram imediatas.*

2. Uma vez que algumas alíneas envolvem valores e vetores próprios vamos calcular a matriz $\mathcal{M}$ que representa f em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$. Como f é a aplicação identidade, a matriz que representa f em relação à base canónica de $\mathbb{R}^4$ é a matriz identidade, que é uma matriz diagonal. Portanto sabemos que os valores próprios são os elementos da diagonal principal, e que a matriz $\mathcal{M} = I_4$ tem 4 vetores próprios linearmente independentes (Proposições 6.33 e 6.35 da 3ª edição do manual).

Assim, podemos concluir que a), b) e d) são falsas e que c) é verdadeira, pois sendo f a identidade é claro que $f = f^2$.

A opção correta é portanto a opção c).

3. Sabemos que uma base de $\mathbb{R}_4[x]$ é por exemplo $(1, x, x^2, x^3, x^4)$, que tem portanto dimensão 5. Identificando $\mathbb{R}_4[x]$ com $\mathbb{R}^5$ podemos identificar os geradores de F e G com os vetores $(1,0,0,0,0), (0,0,0,1,0), (0,1,1,0,0)$ para F, e $(1,0,0,1,0), (1,1,0,0,0)$ para G. Como tanto num caso como no outro os vetores são linearmente independentes, a dimensão de F é 3 e a dimensão de G é 2; podemos também concluir que os vetores de F se podem escrever na forma $a(1,0,0,0,0) + b(0,0,0,1,0) + c(0,1,1,0,0) = (a,c,c,b,0)$ e que os vetores de G se podem escrever na forma $d(1,0,0,1,0) + e(1,1,0,0,0) = (d+e, e, 0, d, 0)$. Pelo Teorema das Dimensões temos que

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - \dim(F \cap G) = 5 - \dim(F \cap G).$$

Pela definição de F e G podemos ver que 1 e x^3 pertencem a F e que $1 + x^3$ pertence a G, e portanto a intersecção $F \cap G$ não se reduz de certeza ao polinómio nulo, o que permite eliminar a opção c).

Raciocinando em termos de $\mathbb{R}^5$, um vetor $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ pertence à intersecção $F \cap G$ se pode ser escrito como combinação linear tanto dos vetores geradores de F como de G, ou seja se é solução de

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (a, c, c, b, 0) \\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= (d+e, e, 0, d, 0) \end{aligned}$$

e portanto

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a, c, c, b, 0) = (d+e, e, 0, d, 0).$$

Facilmente se conclui que as soluções do sistema anterior são os vetores da forma $(a, 0, 0, a, 0) = a(1,0,0,1,0)$ (ou em termos de polinómios, os múltiplos de $1 + x^3$), e portanto $\dim(F \cap G) = 1$ e $\dim(F + G) = 5 - 1 = 4$.

A opção correta é portanto a opção b).

Nota: *Também podíamos ter calculado diretamente a dimensão de $F + G$.*

4. Para um determinante 4×4 vale sempre a pena perder uns segundos a escolher a melhor linha/coluna. Neste caso a segunda linha ou a última coluna davam os melhores resultados.

Escolhendo a segunda linha para desenvolver o determinante 4×4 e depois a terceira coluna para o determinante 3×3 obtemos

$$|A_\beta| \underset{l_2}{=} -\beta \begin{vmatrix} \beta & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{c_3}{=} -\beta \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\beta \times (-1) = \beta,$$

e a opção correta é portanto a opção a).

II. a) Se o polinómio característico de $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é $p_A(z) = z(z-1)(z-2)$, então, necessariamente 0 é valor próprio de A e portanto A não é uma matriz invertível.

b) Vamos mostrar que o conjunto $\mathcal{F} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xyz = 0\}$ não é fechado para a soma. Para isso escolhemos 2 vetores em $\mathcal{F}$ tais que a sua soma não está em $\mathcal{F}$. A maneira mais simples é reparar que os elementos de $\mathcal{F}$ têm uma das componentes nulas, e se essa componente não for a mesma para os 2 elementos então em geral a sua soma não pertence a $\mathcal{F}$.

Por exemplo $u = (0, 1, 1) \in \mathcal{F}$ e $v = (1, 0, 1) \in \mathcal{F}$, mas $u + v = (1, 1, 2) \notin \mathcal{F}$. Este (contra)exemplo mostra que $\mathcal{F}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

III. Antes de utilizarmos o *método de eliminação de Gauss* para estudar o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

vamos escrevê-lo em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada deste sistema é

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e portanto

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 - l_1 \\ l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 - l_2 \\ -\frac{l_4}{2} + \frac{l_3}{2}}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 - l_4 \\ l_2 - l_4 \\ l_3 - l_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1-l_4\\ l_2+l_4\\ l_3-2l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2\longleftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Dada a forma final (4 pivots), podemos concluir que o sistema tem solução e que é única, sendo dada por $(1, -2, 1, 0)^\top$.

IV.

a) Como f é linear tem-se

$$f(x, y, z) = f(x, 0, 0) + f(0, y, 0) + f(0, 0, z) = xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1),$$

e portanto basta determinar $f(1, 0, 0), f(0, 1, 0)$ e $f(0, 0, 1)$ para determinar f.

Outra forma de resolver seria considerar a base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$ para determinar f nessa base e depois mudar para a base canónica.

Uma vez que o que nos é dado são as imagens dos vetores da base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$, para determinar $f(1, 0, 0), f(0, 1, 0)$ e $f(0, 0, 1)$, temos de escrever os vetores da base canónica à custa dos vetores da base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$.

Sejam $\mathcal{B} = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})$ a base canónica e $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ a base $((1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1))$.

Queremos escrever $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$ à custa de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. É óbvio que $\mathbf{e_1} = \mathbf{v}$ e sem grande dificuldade podia-se concluir que $\mathbf{e_2} = \mathbf{w} - \mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{e_3} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.

Para casos mais complicados podemos chegar a este resultado resolvendo o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1} &= \alpha_1\mathbf{u} + \beta_1\mathbf{v} + \gamma_1\mathbf{w}\\ \mathbf{e_2} &= \alpha_2\mathbf{u} + \beta_2\mathbf{v} + \gamma_2\mathbf{w}\\ \mathbf{e_3} &= \alpha_3\mathbf{u} + \beta_3\mathbf{v} + \gamma_3\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e_1}\\ \mathbf{e_2}\\ \mathbf{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}\\ \mathbf{v}\\ \mathbf{w} \end{bmatrix},$$

e após substituição:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora determinar a imagem dos vetores da base $\mathcal{B}$ pois

$$\begin{aligned} f(\mathbf{e_1}) &= f(\mathbf{v}) = (3, -1, 0)\\ f(\mathbf{e_2}) &= f(-\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) = -f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w}) = (3, -2, -3)\\ f(\mathbf{e_3}) &= f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = (-2, 3, 3), \end{aligned}$$

e portanto a expressão geral de f será

$$f(x, y, z) = xf(\mathbf{e_1}) + yf(\mathbf{e_2}) + zf(\mathbf{e_3}) = (3x + 3y - 2z, -x - 2y + 3z, -3y + 3z).$$

b) A partir da alínea anterior obtemos imediatamente a matriz que representa f na base canónica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

As colunas desta matriz correspondem à imagem dos vetores da base canónica.

c) O núcleo de f corresponde aos vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$. A imagem de f corresponde aos vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe algum $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(a, b, c) = (x, y, z)$.

Uma vez que $\det A = 12 \neq 0$ concluimos que o núcleo se reduz ao vetor nulo, e portanto pelo Teorema da Dimensão que a imagem é o espaço $\mathbb{R}^3$ todo. O núcleo de f tem dimensão zero, e uma base do núcleo é a sequência vazia $\varnothing$.

A imagem de f tem dimensão 3 e podemos escolher a base canónica de $\mathbb{R}^3$ como base da imagem.

d) Uma vez que a imagem de f é o espaço $\mathbb{R}^3$, podemos escolher a mesma base que na alínea anterior.

V. Neste exercício usaremos o facto de $\left(A^\top\right)^\top = A$, $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$ e $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$, para qualquer matriz A e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Por definição tem-se

$$\begin{aligned} A_s^\top &= \left(\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A^\top + \left(A^\top\right)^\top\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A^\top + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) = A_s, \end{aligned}$$

o que mostra que A_s é simétrica.

Vejamos agora que A_a é anti-simétrica:

$$\begin{aligned} A_a^\top &= \left(\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)^\top = \frac{1}{2}\left(A^\top - \left(A^\top\right)^\top\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(A^\top - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = -A_a, \end{aligned}$$

o que mostra que A_a é anti-simétrica.

b) Por definição as matrizes A_s e A_a comutam se e só se $A_aA_s = A_sA_a$. Usando a definição de A_s e A_a tem-se

$$\begin{aligned} A_aA_s = A_sA_a &\iff \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right)\frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right)\frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) \\ &\iff \frac{1}{4}\left(AA - AA^\top + A^\top A - A^\top A^\top\right) = \frac{1}{4}\left(AA + AA^\top - A^\top A - A^\top A^\top\right) \\ &\iff AA - AA^\top + A^\top A - A^\top A^\top = AA + AA^\top - A^\top A - A^\top A^\top \\ &\iff A^\top A + A^\top A = AA^\top + AA^\top \iff 2A^\top A = 2AA^\top \\ &\iff A^\top A = AA^\top \\ &\iff A \text{ e } A^\top \text{ comutam.} \end{aligned}$$

c) O traço de uma matriz corresponde à soma dos elementos da diagonal principal, e portanto tem-se

- $\operatorname{Tr}(A+B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B,$ pois $\sum_{j=1}^{n}(A+B)_{jj} = \sum_{j=1}^{n} A_{jj} + \sum_{j=1}^{n} B_{jj}$,
- $\operatorname{Tr} A^\top = \operatorname{Tr} A,$ pois $\sum_{j=1}^{n}(A^\top)_{jj} = \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$ e
- $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr} A,$ pois $\sum_{j=1}^{n}(\alpha A)_{jj} = \alpha \sum_{j=1}^{n} A_{jj}$.

Usando estas propriedades podemos concluir que

$$\operatorname{Tr} A_s = \operatorname{Tr} \frac{1}{2}\left(A + A^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} A^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} A\right) = \operatorname{Tr} A.$$

E para a parte anti-simétrica

$$\operatorname{Tr} A_a = \operatorname{Tr} \frac{1}{2}\left(A - A^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} A - \operatorname{Tr} A^\top\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{Tr} A - \operatorname{Tr} A\right) = 0.$$

Grupo V. do p-fólio

a) Vejamos que $\mathcal{V}$ satisfaz as condições do Critério de Subespaço Vetorial:

i) A matriz nula de ordem n, 0_n pertence a $\mathcal{V}$ pois $A0_n = 0_n$;

ii) Se $AB_1 = 0_n$ e $AB_2 = 0_n$ então $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2 = 0_n + 0_n = 0_n$, ou seja se $B_1,\ B_2 \in \mathcal{V}$ então a soma $B_1 + B_2 \in \mathcal{V}$;

iii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathcal{V}$ então $A(\alpha B) = \alpha(AB) = \alpha 0_n = 0_n$, ou seja se $B \in \mathcal{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ então $(\alpha B) \in \mathcal{V}$.

b) Se a característica de uma matriz $n \times n$ é igual a n, então essa matriz é invertível e portanto

$$AB = 0_n \iff B = A^{-1}0_n = 0_n.$$

Concluimos portanto que $\mathcal{V}$ se reduz à matriz nula 0_n.