UAb

ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA | 21037

ATIVIDADE FORMATIVA 2

Período de realização

Decorre de 9 a 15 de Maio de 2023

Temas:

- Variáveis Aleatórias
- Variáveis Aleatórias Discretas

Objetivos

Os objetivos da atividade formativa insirem sobre os objetivos dos Temas 3 e 4:

- Definição de variável aleatória
- Função de distribuição
- Variáveis aleatórias bidimensionais discretas
- Função de probabilidade e função de distribuição
- Valor esperado. Momentos.
- Algumas distribuições paramétricas discretas: Distribuição uniforme
- Distribuição de Bernoulli. Distribuição binomial
- Distribuição geométrica. Distribuição hipergeométrica
- Distribuição de Poisson

Descrição da Atividade (Exercícios a Resolver)

1. Numa casa de jogo ilegal existe uma roleta, com casas numeradas de 1 a 20, que está viciada: a probabilidade de sair uma casa com numeração superior a 14 é o quádruplo da probabilidade de sair uma casa com numeração inferior a 15.

1.1 Indique o espaço de resultados e a variável aleatória subjacente.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

1.2 Calcule a probabilidade de sair uma casa numerada com um valor superior a 17.

1.3 Determine a probabilidade de sair uma casa numerada com um número par.

2. Considere o lançamento de um par de dados usuais. Em cada jogada observa-se o número de pintas das faces que ficam viradas para cima, somam-se os pontos assim obtidos e, à soma obtida, aplica-se a regra "'noves fora"'[1]. Por exemplo, se num dado sairem 6 pintas e no outro dado 4 pintas, a soma dá 10 que, "'noves fora"', dá 1.

2.1 Identifique o espaço de resultados e a variável aleatória X subjacente.

2.2 De quantas maneiras se pode obter pelo procedimento descrito o número 2?

2.3 Calcule o valor de $P(X = 2)$ e de $P(X \leq 5|X \geq 2)$.

2.4 Determine a função de probabilidade e a função de distribuição de X.

3. Seja X uma variável aleatória discreta, com valores no conjunto $\{-1, 0, 1, 2\}$, e de função de probabilidade dada pela tabela seguinte:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2α	0.3	0.4	α

3.1 Determine o valor de α.

3.2 Calcule $E(X + 2)$, $E(X^2)$ e $P(X < E(X^2))$.

3.3 Determine a função de probabilidade da variável aleatória $Y = X^2$.

4. Determine a probabilidade de em cinco lançamentos de um dado usual sair duas vezes, e apenas duas vezes, o número dois.

5. Uma caixa contém 80 berlindes dos quais 15 apresentam pequenos defeitos. Assumindo que uma tiragem significa uma extração aleatória de um berlinde seguida da sua reposição na caixa, determine:

5.1 A probabilidade de em 20 tiragens ser encontrado um único berlinde defeituoso.

5.2 Quantas tiragens devem ser realizadas de modo que a probabilidade de se retirar um berlinde defeituoso seja superior a 40%.

6. No contexto do exercício anterior, suponha que são retiradas, sem reposição e aleatoriamente, 20 berlindes da caixa. Calcule a probabilidade de entre os 20 berlindes retirados, dois serem defeituosos.

7. Determine a função geradora de momentos correspondente à distribuição de Poisson.

8. Por uma questão de contenção de despesas, alguns serviços de saúde têm vindo a ser extintos e outros agrupados em novos centros de atendimento. Suponha que numa determinada freguesia existiam três centros, A, B e C, que, independentemente, prestavam serviços de saúde à população local e que o número de pessoas que se dirigiam por hora a estes centros seguia uma distribuição de Poisson a uma média, respectivamente, 5, 10 e 3 ocorrências.
Agora que os serviços de saúde prestados nestes três centros estão concentrados num único centro novo, determine a probabilidade de numa hora serem atendidas 12 pessoas neste novo centro.

[1] Esta regra é equivalente à determinação do resto da divisão por 9. Dito de outro modo, o valor que se obtém por aplicação da regra "'noves fora"' a um número ´é igual ao valor do resto da divisão desse número por 9.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

9. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas com valores no conjunto, respetivamente, $\{0,1,2,3\}$ e $\{0,1,2,3,4\}$, e de função de probabilidade, respetivamente,

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.30 & se \quad x = 0 \\ 0.20 & se \quad x = 1 \\ 0.25 & se \quad x \in \{2,3\} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0.40 & se \quad y = 0 \\ \alpha & se \quad y = 1 \\ 0.20 & se \quad y = 2 \\ 0.10 & se \quad y = 3 \\ 0.05 & se \quad y = 4 \end{cases}$$

Relativamente à função de probabilidade conjunta das variáveis X e Y , f, conhecem-se os valores constantes da tabela seguinte:

$f(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$	$y=3$	$y=4$
$x=0$	0.10		0.05	0	0
$x=1$	0	0.05	0.05	0.05	
$x=2$			0	0.05	
$x=3$	0.15	0		0	

9.1 Sem determinar o valor de α, complete a tabela dada.

9.2 Determine o valor de $P(Y=1)$.

9.3 Calcule a covariância entre X e Y e utilize o valor obtido para averiguar se as variáveis X e Y são, ou não, independentes.

10. A função de probabilidade conjunta de duas variáveis aleatórias discretas X e Y com valores no conjunto dos números inteiros não negativos $\mathbb{N} \cup \{0\}$ é igual a

$$f(x,y) = c(2x+y)$$

se $x \in \{0,1,2\}$ e se $y \in \{0,1,2,3\}$, sendo $f(x,y) = 0$ em todos os outros casos.

10.1 Determine:

[10.1.1] O valor de c.

[10.1.2] O valor de $P(X=2, Y=1)$.

[10.1.3] O valor de $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.

[10.1.4] As funções de probabilidade marginal de X e de Y .

10.2 Verifique se as variáveis aleatórias X e Y são, ou não, dependentes.

11. Considere o seguinte conjunto de agregados familiares com dois titulares, cuja função de probabilidade conjunta do rendimento mensal em euros do primeiro titular X e do segundo titular Y está representada na seguinte tabela:

	$Y=1000$	$Y=2000$	$Y=3000$	$Y=4000$
$X=1000$	0.20	0.04	0.01	0
$X=2000$	0.10	0.36	0.09	0
$X=3000$	0	0.05	0.10	0
$X=4000$	0	0	0	0.05

11.1 Obtenha as funções de probabilidades marginais para as variáveis X e Y.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

11.2 Considere apenas os segundos titulares com um rendimento de 2000 euros mensais. Qual a probabilidade do primeiro titular ter um rendimento igual?

11.3 Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável X e da variável Y.

11.4 Serão X e Y variáveis aleatórias independentes?

1.5 Calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre X e Y.

11.6 Calcule o valor esperado e o desvio padrão do rendimento total (R), considerando $R = X + Y$.

12. De uma fornada de 300 bolinhos de feijão retiram-se 5. Admitindo que a percentagem de bolinhos de tamanho não conforme (abaixo do permitido) na fornada é de 1%, calcule a probabilidade de, entre os 5 bolinhos retirados, haver pelo menos um não conforme.

Recursos

Pode utilizar todos os recursos disponibilizados na página da unidade curricular e da bibliografia recomendada.

UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

FIM