E-Fólio A - Resolução

1. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} + 4 & x < 0 \\ \\ ae^{-x} + 3 & x \geq 0, \end{cases}$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **[0.1 val.]** Indique o domínio de f.
O domínio de f é $\mathbb{R}$.

(b) **[0.4 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} + 4 \right)$$

Notamos agora que

$$-1 \leq \sin(e^x - 1) \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e para $x < 0$, temos $x^3 < 0 \Rightarrow x^3 - 1 < 0$ pelo que

$$\frac{1}{x^3 - 1} \leq \frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} \leq -\frac{1}{x^3 - 1}.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3 - 1} = 0$$

e também

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x^3 - 1} \right) = 0.$$

Pelo teoremas dos limites enquadrados, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} \right) = 0,$$

pelo que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} + 4 \right) = 0 + 4 = 4.$$

Temos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(ae^{-x} + 3\right) = 3,$$

pois

$$\lim_{x \to +\infty} \left(ae^{-x}\right) = a \lim_{x \to +\infty} \left(e^{-x}\right) = 0.$$

Em alternativa, poderíamos calcular $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, sem usar o teorema dos limites enquadrados, notando que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} + 4\right) \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sin(e^x - 1)}{x^3 - 1} + 4 \\
&= \left(\lim_{x \to -\infty} \sin(e^x - 1)\right) \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3 - 1}\right) + 4,
\end{aligned}$$

desde que ambos os limites existam. Agora é relevante a seguinte:

Nota: Sejam f e g duas funções. Se a função g for contínua num dado ponto b, sabemos que existe $\lim_{y \to b} g(y)$ e temos

$$\lim_{y \to b} g(y) = g(b). \tag{1}$$

Suponhamos agora que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e temos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b. \tag{2}$$

Pela regra de substituição da página 69 do manual, temos

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = \lim_{y \to b} g(y). \tag{3}$$

Então,

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) \overset{(3)}{=} \lim_{y \to b} g(y) \overset{(1)}{=} g(b) \overset{(2)}{=} g(\lim_{x \to a} f(x)),$$

ou seja,

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)).$$

Regressando ao exercício, sabemos que a função seno é contínua, pelo que, atendendo à nota anterior,

$$\lim_{x \to -\infty} \sin(e^x - 1) = \sin(\lim_{x \to -\infty} (e^x - 1)) = \sin(0 - 1) = -\sin(1)$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \left(\underbrace{\lim_{x\to-\infty} \sin(e^x - 1)}_{=-\sin(1)}\right)\left(\underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3-1}}_{=0}\right) + 4 = 4.$$

(c) **[0.3 val.]** Estude a continuidade de f no conjunto $]-\infty, 0[$.
Quando $x < 0$, temos que a função $e^x - 1$ é contínua pois resulta da diferença da função exponencial com uma constante, ambas funções contínuas. Então $\sin(e^x - 1)$ é contínua pois é a composição da função seno, com a função $e^x - 1$, ambas contínuas. A função $\dfrac{\sin(e^x-1)}{x^3-1}$ é contínua pois resulta da divisão de $\sin(e^x - 1)$ e o polinómio $x^3 - 1$, ambos funções contínuas, sendo que para $x < 0$, o denominador nunca se anula. Finalmente a função $\dfrac{\sin(e^x-1)}{x^3-1} + 4$ é contínua, pois é soma de uma função contínua e uma constante, também ela uma função contínua.

(d) **[0.3 val.]** Determine a de forma a que f seja contínua no ponto $x = 0$. Para que a função f seja contínua no ponto $x = 0$, devemos ter

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x) = f(0).$$

Notamos que

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin(e^x-1)}{x^3-1} + 4\right) = \lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin(e^x-1)}{x^3-1}\right) + 4.$$

Agora notamos que

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin(e^x-1)}{x^3-1}\right) = \frac{\lim_{x\to0^-}\sin(e^x-1)}{\lim_{x\to0^-}(x^3-1)},$$

desde que os limites em numerador e denominador existam (na recta acabada) e a divisão não conduza a uma indeterminação. Novamente, usando a nota da alínea 1b) e o facto de a função seno ser contínua, temos

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{\sin(e^x-1)}{x^3-1}\right) = \frac{\sin(\lim_{x\to0^-}(e^x-1))}{\lim_{x\to0^-}(x^3-1)} = \frac{0}{-1} = 0,$$

pelo que

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 + 4 = 4.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(ae^{-x} + 3\right) = ae^0 + 3 = a + 3 = f(0).$$

Assim, para que f seja contínua no ponto $x = 0$ devemos ter

$$a + 3 = 4,$$

ou seja $a = 1$.

2. **[0.8 val.]** Considere a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to e^{x-1} - 3 \end{aligned}$$

(a) **[0.4 val.]** Esboce o gráfico de f.

Podemos interpretar a função f como resultando da função exponencial, depois de aplicadas duas translações. A função $g(x) = e^{x-1}$ pode ser vista como a função que resulta de aplicar uma translação horizontal de uma unidade para a direita ao gráfico da função exponencial e a função f resulta da aplicação de uma translação vertical de três unidades para baixo à função g. Em particular, notamos que o contradomínio da função g é o mesmo que o da função exponencial, ou seja é o intervalo $]0, +\infty[$ e contradomínio da função f é o intervalo $]-3, +\infty[$. Um esboço dos gráficos de g e f pode ser o seguinte

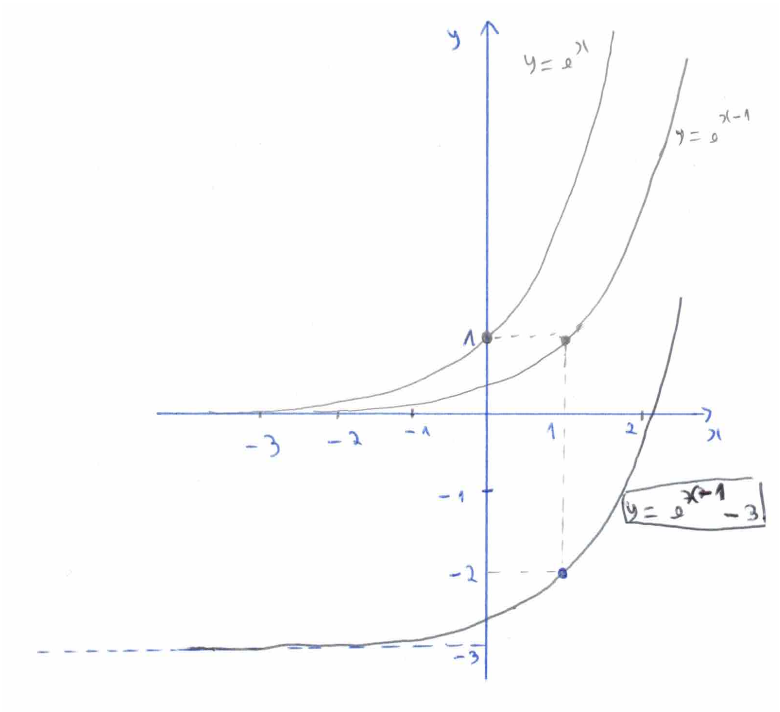
(b) **[0.4 val.]** Caracterize a função inversa de f.

Temos

$$x = f(y) \Leftrightarrow x = e^{y-1} - 3 \Leftrightarrow x + 3 = e^{y-1} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{se } x>-3} y - 1 = \ln(x+3) \Leftrightarrow$$
$$y = \ln(x+3) + 1 \Leftrightarrow y = f^{-1}(x).$$

O domínio da função inversa de f coincide com o controdomínio da função f que vimos na alínea anterior ser o intervalo $]-3, +\infty[$. Logo, a função inversa de f é a função

$$\begin{aligned} f^{-1} :&]-3, +\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \to \ln(x+3) + 1. \end{aligned}$$



3. **[0.7 val.]** Prove, por definição formal de limite, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)x^2+6}{3} = 2.$$

Pretendemos provar que

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0 \;:\; 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\left(\frac{\sin(x)x^2+6}{3}\right) - 2\right| = \frac{|\sin(x)x^2|}{3} < \epsilon.$$

Temos que

$$\left|\sin(x)x^2\right| = \underbrace{|\sin(x)|}_{\leq 1}|x^2| \leq |x^2| = x^2,$$

pelo que

$$\frac{|\sin(x)x^2|}{3} \leq \frac{x^2}{3}.$$

Notamos que

$$\frac{x^2}{3} < \epsilon \Rightarrow x^2 < 3\epsilon.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \sqrt{3\epsilon}$, para que, sempre que $|x| < \delta$, se tenha necessariamente $\left|\left(\dfrac{\sin(x)x^2+6}{3}\right) - 2\right| < \epsilon$.

Concluímos, portanto, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)x^2+6}{3} = 2.$$

4. **[0.8 val.]** Calcule
$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-3x^2+4)\,e^x}{x^3-4x^2+4x}.$$

A substituição direta de x por 2, conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Vamos agora calcular a divisão do polinómio no numerador por $x-2$, pela regra de Ruffini obtendo

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

ou seja, obtemos que $x^3-3x^2+4 = (x-2)(x^2-x-2)$ e uma vez que o polinómio x^2-x-2 também se anula quando $x=2$, temos

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ou seja, $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$.

Aplicando o mesmo processo ao denominador

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & 0 \\ \hline & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

verificamos que $x^3-4x^2+4x = (x-2)(x^2-2x)$.

Assim,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3-3x^2+4)\,e^x}{(x^3-4x^2+4x)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)e^x}{(x-2)(x^2-2x)} =$$
$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)e^x}{(x-2)^2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)e^x}{x} = \frac{3e^2}{2}.$$

5. **[0.5 val.]** Sejam f e g duas funções reais de variável real, ambas contínuas no intervalo $[0,1]$. Diga, justificando, se a função

$$h(x) = f(x) + g(x)$$

é necessariamente limitada no intervalo $[0,1]$.

A função h é contínua no intervalo $[0,1]$, pois é definida como a soma de duas funções contínuas nesse intervalo. Por outro lado, como o intervalo $[0,1]$ é fechado e limitado, pelo teorema de Weierstrass, a função h tem máximo e mínimo no intervalo $[0,1]$, ou seja existem constantes reais

$$m := \min_{x\in[0,1]} h(x) \quad \text{e} \quad M := \max_{x\in[0,1]} h(x),$$

tais que

$$m \leq h(x) \leq M, \ \forall x \in [0,1],$$

pelo que h é limitada no intervalo $[0,1]$.

Em alternativa, em vez de se ter recorrido ao teorema de Weierstrass, podia-se ter usado diretamente um seu colorário (Corolário 2 da página 65 do manual), o que conduziria a uma resolução ainda mais imediata do exercício.

FIM