Atividade Formativa 1

Proposta de Resolução

1. Comece-se por observar que, sendo a sucessão $(\frac{1}{n})$ decrescente,

$$\sup\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \max\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

(o primeiro termo da sucessão). A sucessão é ainda limitada e, por conseguinte, convergente para

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\},$$

cf. Teorema 2, pág. 652. Como $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, conclui-se que

$$\inf\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 0.$$

Não existe mínimo, pois $\frac{1}{n} \neq 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

2. **Case Base: $\mathbf{n = 4}$.** Tem-se $(4!)^2 = 24^2$ e $4^2 2^4 = 16^2$, em que $24^2 > 16^2$, o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Fixado um $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, **qualquer**, suponhamos que para esse n tem-se

$$(n!)^2 > n^2\,2^n$$

Tese de indução:

$$((n+1)!)^2 > (n+1)^2\,2^{n+1}$$

(Aqui, o n é o mesmo que surge na hipótese de indução.)

Passo de indução: Por forma a provar a tese de indução, note-se que $((n+1)!)^2 = (n+1)^2(n!)^2$, resultando da hipótese de indução que

$$((n+1)!)^2 = (n+1)^2(n!)^2 > (n+1)^2 n^2\,2^n.$$

Como $n \geq 4$, tem-se $n^2 > 2$ e, portanto,

$$(n+1)^2 n^2\, 2^n > (n+1)^2 2\, 2^n = (n+1)^2 2^{n+1}.$$

Deste modo podemos então concluir que $((n+1)!)^2 > (n+1)^2\, 2^{n+1}$, com o que fica provada a tese de indução.

Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que

$$(n!)^2 > n^2\, 2^n, \quad \forall\, n \geq 4.$$

3.1. Utilizemos novamente o método de indução matemática.

Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Tem-se $a_1 = \frac{1}{4} \in \,]0,1[$, com o que fica provado o caso base.

Hipótese de indução: Escolhido um $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que para esse n tem-se

$$a_n \in \,]0,1[\,.$$

Tese de indução:

$$a_{n+1} \in \,]0,1[\,.$$

(Aqui, o n é o mesmo que surge na hipótese de indução.)

Passo de indução: Decorre da hipótese de indução ($a_n > 0$) que $a_n^2 > 0$ e $\frac{a_n}{2} > 0$, pelo que

$$(a_n^2+1)\frac{a_n}{2} > 1\,\frac{a_n}{2} = \frac{a_n}{2},$$

ou seja e novamente pela hipótese de indução, $a_{n+1} = (a_n^2+1)\frac{a_n}{2} > \frac{a_n}{2} > 0$. Ainda pela hipótese de indução ($0 < a_n < 1$), tem-se $a_n^2 < 1$ e $\frac{a_n}{2} > 0$, donde

$$(a_n^2+1)\frac{a_n}{2} < (1+1)\frac{a_n}{2} = a_n < 1,$$

onde na última igualdade se utilizou novamente a hipótese de indução. Como resultado, $a_{n+1} = (a_n^2+1)\frac{a_n}{2}$ <1.

Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos então concluir que

$$a_n \in \,]0,1[\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Uma vez que para todo o $n \in \mathbb{N}$ tem-se $0 < a_n < 1$, conclui-se que

$$a_{n+1} = (a_n^2+1)\frac{a_n}{2} < 2\frac{a_n}{2} = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

ou seja, a sucessão (a_n) é estritamente decrescente.

3.3. Decorrente da monotonia de (a_n) (cf. alínea anterior) e do facto de (a_n) ser limitada (cf. alínea 3.1) resulta que (a_n) é convergente (cf. Teorema 2, pág. 652).

Observe-se que do Teorema 2, pág. 652, e do Teorema 5, pág. 103, resulta que

$$a := \lim_n a_n = \inf\{a_1, a_2, a_3, \cdots\} \in [0, a_1]\,,\ a_1 = \frac{1}{4}.$$

Por outro lado e pelo Teorema 2 (pág. 648), a também é o limite da subsucessão $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Logo,

$$a = \lim_n a_{n+1} = \lim_n \left[(a_n^2+1)\frac{a_n}{2}\right] = \left(\lim_n a_n^2 + 1\right)\lim_n \frac{a_n}{2} = (a^2+1)\frac{a}{2},$$

o que implica que

$$a = (a^2+1)\frac{a}{2} \iff (a^2-1)\frac{a}{2} = 0 \iff (a^2-1)a = 0.$$

Esta última equação tem três soluções: 0, -1 e 1. Contudo, como $a \in [0, a_1]$, $a_1 = \frac{1}{4}$, conclui-se que $a = 0$. Ou seja,

$$\lim_n a_n = 0.$$

3.4. Para responder a esta questão convém ter presente o Teorema 3, pág. 649. Por este, supondo que (a_n) é uma subsucessão de uma sucessão limitada (b_n), não se concluir que (b_n) seja convergente. Para o verificar basta apresentar um contra-exemplo. Seja (b_n) a sucessão cuja subsucessão dos termos de ordem par é igual a (a_n) (isto é, $a_n = b_{2n}$) e cuja subsucessão (c_n) dos termos de ordem ímpar é constantemente igual a 1 (isto é, $1 = b_{2n+1}$). Tem-se aqui um caso de uma sucessão limitada em que as subsucessões (a_n) e (c_n) convergem para limites diferentes (0 e 1, respetivamente) e, por conseguinte, pelo Teorema 3, pág. 649, a sucessão (b_n) não converge.

4.1. Provemos o pedido por recurso ao método de indução matemática.

Case Base: $\mathbf{n = 1}$. Tem-se

$$u_1 = 2$$

que, sendo maior ou igual a 2, prova o caso base: $\frac{u_1}{1!} = u_1 = 2 \geq 2$.

Hipótese de indução: Escolhido e fixado um $n \in \mathbb{N}$, qualquer, suponhamos que para esse n tem-se

$$\frac{u_n}{n!} \geq 2.$$

Tese de indução:

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} \geq 2.$$

(Aqui, o n é o mesmo que surge na hipótese de indução.)

Passo de indução: Por forma a provar a tese de indução, comece-se por notar que ela é equivalente a

$$\frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} \geq 2.$$

Tem-se então

$$\frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} = \frac{n^2+1}{n+1} \cdot \frac{u_n}{n!} \geq 2\frac{n^2+1}{n+1},$$

onde na igualdade (anterior) se utilizou o facto de $(n+1)! = (n+1)n!$ e na desigualdade (anterior) se utilizou a hipótese de indução. Como

$$n \geq 1 \implies n^2 \geq n \implies n^2+1 \geq n+1 \implies \frac{n^2+1}{n+1} \geq 1,$$

conclui-se que

$$\frac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n^2+1)u_n}{(n+1)!} \geq 2\frac{n^2+1}{n+1} \geq 2,$$

o que prova a tese de indução.

Conclusão: Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{n!} \geq 2$.

4.2. Da alínea anterior resulta, em particular, que todos os termos da sucessão são positivos: $u_n \geq 2n! \geq 2 > 0$. Assim, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$u_{n+1} = (\underbrace{n^2+1}_{\geq 1})u_n \geq u_n,$$

o que prova que (u_n) é uma sucessão crescente.

4.3. Observe-se que

$$\begin{aligned} u_1 &= 2 \\ u_2 &= (1^2+1)u_1 = 4 \\ u_3 &= (2^2+1)u_2 = 20 \\ u_4 &= (3^2+1)u_3 = 200 \end{aligned}$$

Como $20 = u_3 < 150 < u_4 = 200$ e a sucessão (u_n) é crescente (o que significa que todos os restantes termos da sucessão são superiores a u_4), conclui-se que não existe nenhum índice n para o qual $u_n = 150$.

4.4. Da alínea 4.1 resulta que a sucessão (u_n) não é limitada ($u_n \geq 2n!$), pelo que não existe limite da sucessão.

5.1. Para a primeira desigualdade tem-se

$$n < n+1 \implies n^{1/4} < (n+1)^{1/4} \implies 0 < (n+1)^{1/4} - n^{1/4};$$

e, para a segunda,

$$\begin{aligned} n < n+1 &\implies n^{3/4} < (n+1)^{3/4} \\ &\implies n^{3/4}(n+1)^{1/4} < (n+1)^{3/4}(n+1)^{1/4} = n+1 \\ &\implies n^{3/4}(n+1)^{1/4} - n < 1 \\ &\implies n^{-3/4}\left[n^{3/4}(n+1)^{1/4} - n\right] < 1 \times n^{-3/4} \\ &\implies (n+1)^{1/4} - n^{1/4} \leq n^{-3/4}. \end{aligned}$$

5.2. Como

$$0 < (n+1)^{1/4} - n^{1/4} \leq n^{-3/4}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

tem-se

$$\underbrace{\lim_n 0}_{=0} < \lim_n \left((n+1)^{1/4} - n^{1/4}\right) \leq \underbrace{\lim_n n^{-3/4}}_{=0},$$

decorrendo do Princípio dos Limites Enquadrados (Teorema 2, pág. 100),

$$\lim_n(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}) = \lim_n \left((n+1)^{1/4} - n^{1/4}\right) = 0.$$

6.1. Comece-se por observar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+2n^2+2}} \tag{1}$$

é uma série de termos não negativos. Consideremos a série de Dirichlet de termo geral $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ (pág. 595). Designando por a_n o termo geral da série (1), tem-se

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{n-1}{\sqrt{n^3+2n^2+2}} n^{1/2} = 1,$$

o que pela alínea 1 do Critério de Comparação (Teorema 6, pág. 595) permite concluir que as séries de termo geral a_n e b_n são da mesma natureza. Como a série de Dirichlet de termo geral $b_n = \frac{1}{n^{1/2}}$ é divergente (cf. pág. 595), a série dada também é divergente.

6.2. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n - 2\sqrt{n}} \right)^n \tag{2}$$

é uma série de termos positivos. A forma do seu termo geral sugere a utilização do Critério da Raiz (Teorema 8, pág. 607). Para o efeito, observe-se que

$$\frac{2n}{3n-2\sqrt{n}} \geq 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pelo que, designando por a_n o termo geral da série (2), tem-se

$$\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{2n}{3n-2\sqrt{n}} \right)^n} = \lim_n \frac{2n}{3n-2\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Uma vez que $\frac{2}{3} < 1$, a aplicação do critério referido permite concluir que a série (2) é convergente.

6.3. A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2} \right)^n n! \tag{3}$$

também é de termos positivos. A sua forma também sugere a utilização do Critério da Raiz (Teorema 8, pág. 607) se se notar que

$$n! = n \times \underbrace{(n-1)}_{\leq n} \times \underbrace{(n-2)}_{\leq n} \times \cdots \times \underbrace{1}_{\leq n} \leq n^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

pelo que

$$\left(\frac{2}{n^2} \right)^n n! \leq \left(\frac{2}{n^2} \right)^n n^n = \left(\frac{2}{n} \right)^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Tal como na alínea anterior, resulta então da aplicação do Critério da Raiz a convergência da série de termo geral $\left(\frac{2}{n}\right)^n$, o que por (4) e pela alínea 1 do Critério Geral de Comparação (Teorema 5, pág. 592) permite concluir a convergência da série (3).

Alternativamente, designando por a_n o termo geral da série (3), tem-se

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{2^{n+1} n^{2n}(n+1)!}{2^n (n+1)^{2(n+1)} n!} &= 2 \lim_n \frac{n+1}{(n+1)^2} \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= 2 \lim_n \frac{1}{n+1} \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}\end{aligned}$$

com

$$\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = \frac{1}{\left[\lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^2} = \frac{1}{e^2}.$$

Ou seja,

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 \times 0 \times \frac{1}{e^2} = 0 < 1,$$

o que pelo Critério de D'Alembert (Teorema 7, pág. 605) confirma a convergência da série (3).

6.4. Neste caso tem-se uma série de alternada, uma vez que, designando por a_n o termo geral da série, tem-se

$$a_n a_{n+1} = (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ coincide com a série de Dirichlet de termo geral $\frac{1}{n^{1/3}}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente (cf. pág. 595). Contudo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, o que decorre da aplicação do Critério de Leibniz (Teorema 2, pág. 599), pois

$$\lim_n |a_n| = \lim_n \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$$

e a sucessão $(|a_n|)$ é decrescente:

$$n < n+1 \implies \sqrt[3]{n} \leq \sqrt[3]{n+1} \implies \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}}_{|a_{n+1}|} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}_{=|a_n|}.$$

Consequentemente, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é simplesmente convergente (Definição 5, pág. 603).

7.1. Independentemente do valor de α tem-se

$$\left|(-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por comparação com a série de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \tag{5}$$

tem-se

$$\frac{\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}}{\frac{1}{n^{\alpha-1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}$$

com

$$\lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1} = 1.$$

Assim, pela alínea 1 do Critério de Comparação (Teorema 6, pág. 595), isto significa que as séries (5) e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}$ são da mesma natureza, tendo-se então a convergência absoluta da série dada se, e só se, a série de Dirichlet (5) convergir. Tal acontece se, e somente se, $\alpha - 1 > 1$ (cf. pág. 595).

7.2. Note-se que

$$-\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} \leq \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pelo que decorre do Princípio dos Limites Enquadrados, ou do Teorema 3 do Apêndice A.1, que o termo geral da série converge para 0 e, e só se,

$$\lim_n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = 0.$$

Tal acontece, se, e somente se, $\alpha > 1$. Com efeito, tem-se

$$\frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} \cdot \frac{n}{n+1} \implies \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}} = \lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}},$$

em que

- $\alpha > 1$: $0 < \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{n+1}{(n+1)^{\alpha}} = \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$, em que $\lim_n \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0$ por $\alpha - 1 > 0$. Logo, pelo Princípio dos Limites Enquadrados,

$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} = 0.$$

- $\alpha = 1$:
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^\alpha} = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1;$$
- $0 < \alpha < 1$: $\frac{n}{(n+1)^\alpha} \geq \frac{n}{n+1}$ e $\lim_n \frac{n}{n+1} = 1$, pelo que
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^\alpha} \neq 0;$$
- $\alpha \leq 0$: $\frac{n}{(n+1)^\alpha} = n(n+1)^{-\alpha}$ com $-\alpha \geq 0$, pelo que
$$\lim_n \frac{n}{(n+1)^\alpha} = \lim_n n(n+1)^{-\alpha} = +\infty;$$

Como consequência, pelo Teorema 4, alínea 2, pág. 579 tem-se que a série diverge para $\alpha \leq 1$.

8.1. A afirmação é verdadeira. Para o verificar, comece-se por observar que
$$\frac{a_n^2}{1+b_n} \leq a_n^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$
pois, por hipótese, $b_n \geq 0$, o que implica $0 < \frac{1}{1+b_n} \leq 1$. Vejamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente, o que por (6) e pela alínea 1 do Critério Geral de Comparação (Teorema 5, pág. 592) permitirá concluir a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+b_n}$. Para o efeito, note-se que $\lim_n a_n = 0$ (cf. Teorema 4, alínea 1, pág. 579). Assim, dado $\varepsilon = 1$, decorre da definição de limite de uma sucessão (Definição 1, pág. 99) que existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que
$$a_n < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n > N.$$
Logo,
$$a_n^2 < a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, n > N,$$
o que pela convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e pela alínea 1 do Critério Geral de Comparação (Teorema 5, pág. 592) permite concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.

8.2. Esta afirmação é falsa. Para o provar basta apresentar um contra-exemplo. Considere-se $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, e a série harmónica (divergente) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (Exemplo 12, pág. 580). Dada uma série convergente de termos não negativos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tem-se $\lim_n a_n = 0$ (Teorema 4, alínea 1, pág. 579) e
$$\lim_n \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) = \lim_n (a_n + n) = +\infty,$$

o que pela alínea 2 do Teorema 4, pág. 579 prova a divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)$.