Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 1 a 7 de maio de 2019

Data de Limite de Entrega

7 de maio de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Temas

Tópico 2 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,5 valor
2. 0,5 valor
3. 0,5 valor
4. 1,0 valor

5. 0,5 valor

Total: 4,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Esclareça se os seguintes limites existem ou não e, caso existam, determine o seu valor:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{x+y}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{x+y^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{(y-1)^2\log y}{(y-1)^2+x^2}$.

2. Estude a continuidade da função f definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\frac{x}{y}, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

3. Determine o domínio e estude a continuidade da função g definida por

$$g(x,y) = \frac{\sin x}{\cos y}$$

e investigue se é possível prolongar g ao ponto $(\pi, \frac{\pi}{2})$ de modo que a função resultante seja contínua nesse ponto.

4. Determine, se existirem, ou justifique porque não existem, as derivadas parciais de primeira ordem da função $\varphi(x,y) = \arctan(x+2y)$ num ponto arbitrário (x,y) do seu domínio.
Estude φ quanto à diferenciabilidade.
Escolha um ponto $P \in \mathbb{R}^2$ onde φ for diferenciável e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de φ em P.

5. Considere as funções dadas pelas expressões

$$u(x,y) = (y, x, x^2+y^2), \qquad v(x,y,z) = (z-x^2, z-y^2).$$

Determine a matriz jacobiana de $v \circ u$ por dois modos distintos:

a) determinando primeiro $v \circ u$ explicitamente;

b) pelo teorema de derivação da função composta.

FIM

RESOLUÇÃO

1.a) Comecemos por observar que, se $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, tem-se $h(x,y) := \frac{\sin(xy)}{x+y} = \frac{\sin(xy)}{xy}\frac{xy}{x+y}$. Por outro lado, sabe-se da Análise em uma variável real que $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leq 1$ e que $\frac{\sin(u)}{u} \to 1$ quando $u \to 0$. Conclui-se assim que $\frac{\sin(xy)}{xy} \to 1$ quando $(x,y) \to (0,0)$. Consideremos agora a função $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x+y}$. Se considerarmos $y = mx$, com $m \neq -1$, tem-se

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{m}{1+m}x \to 0 \text{ quando } x \to 0.$$

Portanto, ao longo destas retas tem-se $h(x, mx) \to 0$. Claro que não é possível aproximarmo-nos de $(0,0)$ usando a reta $y = -x$ porque a função não está aí definida. Podemos, no entanto, aproximarmo-nos de $(0,0)$ por pontos que se vão aproximando da reta $y = -x$. Uma possibilidade é, por exemplo, $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $y_n = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. Neste caso tem-se $x_n y_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^{3/2}}$ e $x_n + y_n = \frac{1}{n}$. Portanto

$$\frac{x_n y_n}{x_n + y_n} = -1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \to -1.$$

Portanto, como $\frac{\sin(x_n y_n)}{x_n y_n} \to 1$ (porque $x_n y_n \to 0$), concluimos que se tem $h(x_n, y_n) \to -1$. Isto mostra que o limite do enunciado não existe.

1.b) Tome-se $(x,y) \to (0,0)$ ao longo das parábolas $x = -\alpha y^2$. Tem-se, então,

$$\frac{xy - y^2}{x + y^2} = \frac{-\alpha y^3 - y^2}{-\alpha y^2 + y^2} = \frac{1 + \alpha y}{\alpha - 1} \to \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Como este limite depende da parábola escolhida conclui-se que o limite quando $(x,y) \to (0,0)$ não existe.

1.c) $0 \leq \left|\frac{(y-1)^2 \log y}{(y-1)^2 + x^2}\right| = \frac{(y-1)^2}{(y-1)^2 + x^2}|\log y| \leq |\log y| \to 0$ quando $y \to 1$, pelo que o limite em causa existe e é igual a zero.

2. Fora da reta $y = 0$ a função f é obtida pelo produto do polinómio y^2 pelo seno de $u(x,y)$, onde esta última função é a função racional $u(x,y) = x/y$. Como todas as funções envolvidas são contínuas nos seus domínios, conclui-se pelos resultados estudados que a função $(x,y) \mapsto y^2 \sin(x/y)$ é também contínua no seu domínio, ou seja: em $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times$

$\{0\})$. Para estudar a contínuidade em pontos da reta $y = 0$ basta observar que

$$0 \leq \left| y^2 \sin \frac{x}{y} - 0 \right| = y^2 \left| \sin \frac{x}{y} \right| \leq y^2 \leq x^2 + y^2 \leq \|(x,y)\|^2$$

para concluir que a função f é contínua nos pontos da reta $y = 0$ e, portanto, em todo o $\mathbb{R}^2$.

3. O domínio da função g é

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_g &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \cos y \neq 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{R} \times \left(\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

A função será prolongável por continuidade a $\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$ se existir limite de g quando $(x,y) \to \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$. Observando que, com $u = x - \pi$ e $v = \frac{\pi}{2} - y$, pode-se escrever

$$\frac{\sin x}{\cos y} = -\frac{\sin u}{\sin v},$$

o limite em causa corresponde ao limite da expressão no membro direito quando $(u,v) \to (0,0)$. Considerando $v = u$ e $v = -u$ o membro direito é igual a, respetivamente, -1 e 1, pelo que concluimos que a função g não tem limite quando $(x,y) \to \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, e, portanto, não é prolongável por continuidade a este ponto.

4. A função φ é a composição da função real de uma variável real $\arctan$ com a função polinomial $(x,y) \mapsto x + 2y$. Como ambas estas funções são diferenciáveis, a sua composição também o é, pelo teorema de diferenciabilidade da função composta. Por outro lado, as regras usuais de derivação podem ser utilizadas para calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \arctan(x + 2y) = \frac{1}{1 + (x+2y)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \arctan(x + 2y) = \frac{2}{1 + (x+2y)^2}.$$

Finalmente, sendo $P = (x_0, y_0)$ um ponto arbitrário de $\mathbb{R}^2$, a equação do plano tangente ao gráfico de φ em P é

$$t(x,y) = \varphi(x_0,y_0) + (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla\varphi(x_0,y_0)$$

onde $\nabla\varphi(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$. Portanto

$$t(x,y)=\arctan(x_0,y_0)+\frac{(x+2y)-(x_0+2y_0)}{1+(x_0+2y_0)^2}.$$

5.a) Atendendo às funções dadas no enunciado tem-se que $v\circ u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é a função definida por

$$(v\circ u)(x,y)=v(u(x,y))=v(y,x,x^2+y^2)=(x^2+y^2-y^2,x^2+y^2-x^2)=(x^2,y^2).$$

Consequentemente, como $v\circ u$ é uma função polinomial, é diferenciável e a sua derivada é

$$D(v\circ u)(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial x^2}{\partial x} & \frac{\partial x^2}{\partial y}\\ \frac{\partial y^2}{\partial x} & \frac{\partial y^2}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{bmatrix}.$$

5.b) Pelo teorema de derivação da função composta tem-se

$$\begin{aligned}
D(v\circ u)(x,y) &= Dv(u(x,y))Du(x,y)\\
&= \left.\begin{bmatrix}-2\tilde{x} & 0 & 1\\ 0 & -2\tilde{y} & 1\end{bmatrix}\right|_{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=u(x,y)}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2x & 2y\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}-2y & 0 & 1\\ 0 & -2x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 2x & 2y\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}2x & 0\\ 0 & 2y\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$