Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correcção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
D)	A)	D)

4.1. Com vista a um absurdo, suponhamos que $a^2 = 7b^2$ para $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \geq 2$.

Considerando a factorização em números primos de a e b, suponhamos que na factorização de a surge o factor 7^m, para um certo $m \in \mathbb{N}$, e na factorização de b surge o factor 7^n, para um certo $n \in \mathbb{N}$. Logo, na factorização em números primos de a^2 e $7b^2$ surgem os factores, respectivamente,

$$7^{2m}, \quad 7^{2n+1}.$$

Como, por hipótese, $a^2 = 7b^2$, resulta então da unicidade da factorização em números primos que

$$2m = 2n + 1,$$

o que é um absurdo, pois $2m$ é um número par e $2n + 1$ é um número ímpar. Tendo o absurdo derivado da hipótese de existirem números naturais $a, b \geq 2$ tais que $a^2 = 7b^2$, conclui-se assim que não existe nenhum par de números naturais a e b, $a, b \geq 2$, tais que $a^2 = 7b^2$.

4.2. Se $\sqrt{7}$ fosse um número racional, então $\sqrt{7}$ poder-se-ía escrever na forma de uma fracção: $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ para $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b > 1$. Logo, ter-se-ía $7 = \frac{a^2}{b^2}$ que, como provado na alínea 4.1, é impossível.

Logo, $\sqrt{7}$ não é um número racional, o que é equivalente a $\sqrt{7}$ ser um número irracional.

5.1.1. **Case Base:** $\mathbf{n = 0}$. Tem-se

$$2^{0+2} + 3^{0+2} = 13$$

que, sendo divisível por 13, prova o caso base.

Hipótese de indução: Fixado um $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que para esse n tem-se

$$2^{4n+2} + 3^{n+2} = 13k_n$$

para um certo $k_n \in \mathbb{Z}$.

Tese de indução: $2^{4n+6} + 3^{n+3} = 13k_{n+1}$ para um certo $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$. (Aqui, o n é o mesmo que surge na hipótese de indução.)

Tem-se

$$2^{4n+6} + 3^{n+3} = 2^4 2^{4n+2} + 3 3^{n+2} = 2^4(2^{4n+2} + 3^{n+2}) - (\underbrace{2^4 - 3}_{=13})3^{n+2},$$

em que, pela hipótese de indução, $2^{4n+2} + 3^{n+2} = 13k_n$. Por conseguinte,

$$2^{4n+6} + 3^{n+3} = 13(\underbrace{2^4 k_n - 3^{n+2}}_{=:k_{n+1} \in \mathbb{Z}}).$$

Pelo método de indução matemática, podemos assim concluir que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ é divisível por 13.

5.1.2. De acordo com o Exercício 3 da Actividade Formativa 2 (ver resolução),

$$13 \,|\, (16^n - 3^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Por linearidade (Lema 1.1 Propriedade (i) do texto sobre Divisibilidade), tem-se então

$$\left.\begin{array}{l} 13 \,|\, (16^n - 3^n) \\ \\ 13 \,|\, 13 \end{array}\right\} \implies 13 \,|\, \underbrace{(4(16^n - 3^n) + 13 \cdot 3^n)}_{=4^{2n+1} + 3^{n+2}},$$

o que, equivalentemente, traduz-se por $2^{4n+2} + 3^{n+2}$ ser divisível por 13.

5.2. De acordo com o Lema 1.11 alínea 2 do texto sobre Divisibilidade,

$$\mathrm{mdc}(2^{4n+2}+3^{n+2}, 3^{n+2}) = \mathrm{mdc}((2^{4n+2}+3^{n+2})-3^{n+2}, 3^{n+2}) = \mathrm{mdc}(2^{4n+2}, 3^{n+2}).$$

Uma vez que 2 e 3 são números primos, 2^{4n+2} e 3^{n+2} são duas factorizações em números primos. Logo, tal como no Exercício 7 da Actividade Formativa 2 resulta que $\mathrm{mdc}(2^{4n+2}, 3^{n+2}) = 1$.

6. Fixemos dois números $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + by = 1$. Como $a, b \in \mathbb{N}$, note-se que:

- x e y não podem ser ambos nulos;
- x e y não podem ser ambos negativos;
- x e y só podem ser ambos positivos se, ou a, ou b, for nulo (se $a = 0$, então $b = y = 1$; se $b = 0$, então $a = x = 1$).

Suponhamos então que $x < 0$ e $y > 0$. Neste caso tem-se

$$1 = ax + by = (-a)|x| + by,$$

com $(-a), b \in \mathbb{Z}$. Logo e pelo Corolário 1.8 do texto sobre Divisibilidade,

$$\mathrm{mdc}(|x|, y) \mid 1 \implies \mathrm{mdc}(|x|, y) = 1,$$

pois, por definição, o máximo divisor comum de dois números é sempre um valor positivo. Consequentemente, $\mathrm{mdc}(x, y) = \mathrm{mdc}(|x|, y) = 1$.

De modo análogo prova-se que se $x > 0$ e $y < 0$, então $\mathrm{mdc}(x, y) = 1$.