E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: **FÍSICA GERAL**

CÓDIGO: **21048**

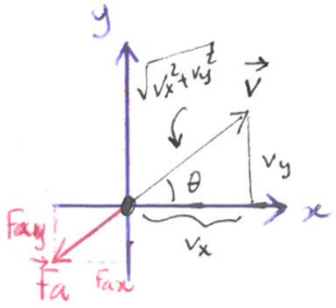
DOCENTE: **Nuno Sousa/Ana Valadares**

A preencher pelo estudante

ANO LETIVO: **2024-25**

TRABALHO / RESOLUÇÃO:

Vejamos a decomposição da força de arrasto e velocidade num referencial xy num ponto qualquer da trajetória. Recordemos a figura do enunciado:



(a) Para $\vec{F}_a = -b_1\vec{v}$ temos $\vec{F}_a = F_{ax}\hat{\mathbf{i}} + F_{ay}\hat{\mathbf{j}} = -b_1 v_x\hat{\mathbf{i}} - b_1 v_y\hat{\mathbf{j}}$, o que leva a

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_a + \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dv_x}{dt} = -b_1 v_x \\ m\dfrac{dv_x}{dt} = -b_1 v_y - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{b_1}{m}v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{b_1}{m}v_y - g \end{cases}$$

Para $\vec{F}_a = -b_2 v^2\hat{\mathrm{v}}$ a situação é ligeiramente diferente. Aqui temos

$$\vec{F}_a = -b_2 v^2 \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} - b_2 v^2 \operatorname{sen}\theta\,\hat{\mathbf{j}}$$

Agora, como $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ e $\cos\theta = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$, substituindo na força de arrasto temos

$$\vec{F}_a = -b_2\left(v_x^2 + v_y^2\right)\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\hat{\mathbf{i}} - b_2\left(v_x^2 + v_y^2\right)\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}\hat{\mathbf{j}} \Leftrightarrow \vec{F}_a$$
$$= -b_2 v_x\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,\hat{\mathbf{i}} - b_2 v_y\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,\hat{\mathbf{j}}$$

Aplicando agora a 2ª lei de Newton temos

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_a + \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{array}{c} m\dfrac{dv_x}{dt} = -b_2 v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ m\dfrac{dv_x}{dt} = -b_2 v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - mg \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{b_2}{m} v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{b_2}{m} v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - g \end{array}$$

Em ambos os casos as equações para a posição são simplesmente, por definição, $\frac{dx}{dt} = v_x$ e $\frac{dy}{dt} = v_y$.

(b)

Tipo de arrasto: linear

t	x	y	vx	vy	k1x	k1vx	k1y	k1vy
0	0	0	4.59619408	4.59619408	4.59619408	-0.2298097	4.59619408	-10.02981
0,005	0.02298097	0.02298097	4.59504503	4.54604503	4.59504503	-0.2297523	4.54604503	-10.027302
0,010	0.0459562	0.0457112	4.59389627	4.49590852	4.59389627	-0.2296948	4.49590852	-10.024795
0,015	0.06892568	0.06819074	4.59274779	4.44578454	4.59274779	-0.2296374	4.44578454	-10.022289
⋮								
0,995	4,46186169	-0,2866055	4,37310099	-5,1404756	4,37310099	-0,218655	-5,1404756	-9,5429762
1,000	4,4837272	-0,3123079	4,37200772	-5,1881905	4,37200772	-0,2186004	-5,1881905	-9,5405905

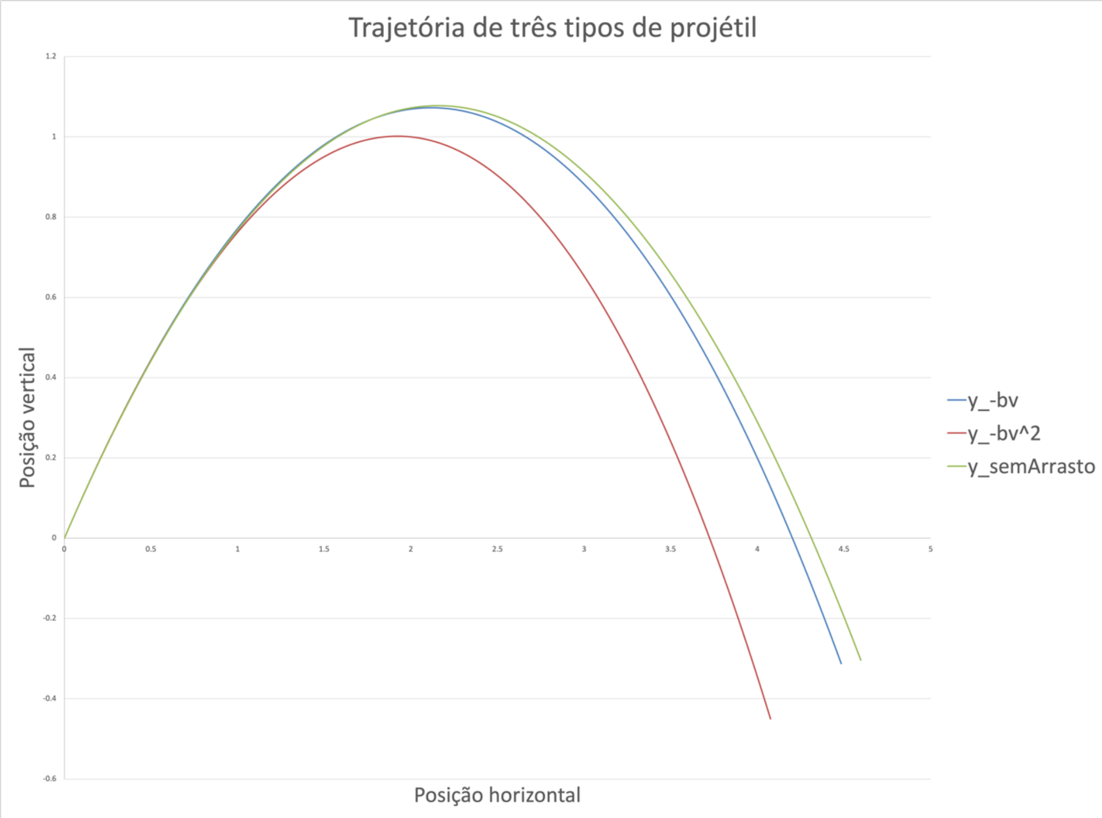
Tipo de arrasto: quadrático

t	x	y	vx	vy	k1x	k1vx	k1y	k1vy
0	0	0	4.59619408	4.59619408	4.59619408	-1.4937631	4.59619408	-11.293763
0,005	0.02298097	0.02298097	4.58872526	4.53972526	4.58872526	-1.4809841	4.53972526	-11.26517
0,010	0.0459246	0.0456796	4.58132034	4.48339941	4.58132034	-1.4683358	4.48339941	-11.236952
0,015	0.0688312	0.06809659	4.57397866	4.42721466	4.57397866	-1.4558176	4.42721466	-11.209105
⋮								
0,995	4.05667397	-0.4249253	3.598378	-5.0563148	3.598378	-1.1165797	-5.0563148	-8.2310213
1,000	4.07466586	-0.4502069	3.5927951	-5.0974699	3.5927951	-1.1203009	-5.0974699	-8.2105133

Tipo de arrasto: nulo

t	x	y
0	0	0
0,005	0,02298097	0,02285847
0,010	0,04596194	0,04547194
0,015	0,06894291	0,06784041
⋮		
0,995	4,57321311	-0,2779094
1,000	4,59619408	-0,3038059

(c) Em formato gráfico temos



Da figura vemos que, como se previa, o arrasto reduz o alcance e altitude máxima do projétil. Quanto maior for o coeficiente de arrasto, maior a perda de alcance e altura. Vemos também que o arrasto quadrático é bem mais penalizante que o linear.

(d) Fazendo uma tabela temos

Ângulo	**Linear** **xi, xi+1, yi, yi+1**	**Alcance linear**	**Quadrático** **xi, xi+1, yi, yi+1**	**Alcance quadrático**
43º	4,184093944 4,206816916 0,012685138 -0,009253087	4,197233	3,71515522 3,734357387 0,01101028 -0,009600951	3,725413
44º	4,182394444 4,204727389 0,019759968 -0,002503575	4,202216	3,71395101 3,732805867 0,013860623 -0,007081399	3,726430
45º	4,19904876 4,220979968 0,003192472 -0,019642356	4,202115	3,70965056 3,728154712 0,01566482 -0,005613175	3,723273
46º	4,1897449084 4,211273869 0,007752097 -0,015421298	4,196947	3,702223205 3,720373269 0,016352229 -0,005266937	3,715951

Vemos que tanto no arrasto linear como no quadrático o ângulo de alcance máximo deixa de ser os 45º do caso de arrasto nulo e desce cerca de 1º, para 44º.

Na verdade, o ângulo que maximiza a distância depende muito do tipo de situação real porque há ainda mais fatores a considerar. Para além de cálculos mais precisos, p.ex., com o algoritmo de Heun poderem dar um resultado mais afastado dos 45º, se considerarmos fatores como a rotação do projétil ou a diminuição da densidade do ar com a altitude podemos ter valores entre os 35º e 48º! Isto para não falar da rotação da Terra, que é imprescindível de considerar em tiro de artilharia de longo alcance ou mísseis balísticos.