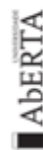




E-fólio A | Instruções e enunciado do e-fólio



Elementos de Probabilidades e Estatística | 21037

DOCENTES: Luís Grilo, Helena Grilo, Sara Pires

ANO LECTIVO: 2022-2023

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

Período de Realização | 10 a 17 de abril de 2023

Data de Limite de Entrega | 17 de abril de 2023, até às 23:55 horas de Portugal Continental

Conteúdos | Tema 1: Dados Estatísticos & Tema 2: Probabilidades.

Objetivos | Os objetivos do e-fólio A consistem em aplicar conceitos e fórmulas matemáticas na resolução dos problemas inerentes ao Tema 1 e Tema 2 em avaliação.

Recursos | O e-fólio A é um trabalho individual. Pode utilizar os recursos da unidade curricular de Elementos de Probabilidades e Estatística (EPE) bem como recursos externos, mas não deve pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com o outros Estudantes de EPE.

Cotação | A cotação total do e-fólio A é de 4.00 valores, distribuídos de acordo com a tabela seguinte:

Questão	1.1	1.2	1.3	2.0	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2
Cotação	0.60	0.50	0.40	0.50	0.70	0.50	0.30	0.30	0.20

CrITÉRIOS de avaliação | Na avaliação do e-fólio A serão tidos em consideração os critérios 1 a 4:

- 1 Correção científica e rigor formal no uso de fórmulas e resultados;
- 2 Capacidade de resolver problemas de forma clara, correta, coerente e objetiva;
- 3 Capacidade de estruturar logicamente as respostas, com indicação explícita dos cálculos efetuados e adequada correção das respostas;
- 4 Capacidade de desenvolver e de apresentar corretamente os cálculos e o raciocínio matemático, utilizando notação adequada.

Normas | Cada Estudante deve respeitar as normas 1 a 17:

- 1 Durante o período dos e-fólios não são respondidas mensagens nos fóruns para esclarecimento de dúvidas sobre os conteúdos programáticos. São exceção os casos relativos ao funcionamento da UC. Este período corresponde a um momento individual para a resolução dos e-fólios;
- 2 O prazo de submissão do e-fólio A deve ser cumprido e não existirá qualquer exceção. Um Estudante que não submeta o e-fólio A até ao prazo limite será avaliado com zero valores;
- 3 A submissão do e-fólio A apenas pode ser realizada no dispositivo próprio da turma de cada Estudante. Não são aceites e-fólios por e-mail ou outra via além da plataforma Moodle;
- 4 O e-fólio A deve ser resolvido de forma individual. Não deve pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os Estudantes de EPE;
- 5 Deve redigir o seu e-fólio A na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho, repetindo a segunda página as vezes que forem necessárias;
- 6 Pode resolver o e-fólio A em computador ou manuscrito, neste caso de uma forma clara e com letra totalmente legível;

- 7 Uma vez que o e-fólio A tem um tempo para resolução suficientemente prolongado, espera-se que as respostas sejam apresentadas com letra legível (caso entregue a prova manuscrita), com boa apresentação e organização. Respostas com letra ilegível ou impercetível serão cotadas com zero valores. Se considera ter uma letra pouco legível, resolva o e-fólio A no computador (utilizando um processador de texto como o MSWord, por exemplo);
- 8 Deve enviar apenas a versão final do documento (sem incluir eventuais rascunhos), embora com todos os cálculos e justificações necessárias à resolução do problema. Respostas ilegíveis não serão cotadas, pelo que deve verificar o documento final com atenção antes de enviar;
- 9 Respostas sem justificação, i.e., sem a apresentação das fórmulas utilizadas e correspondentes cálculos associados serão cotadas com zero valores;
- 10 A apresentação dos cálculos efetuados deve ser feita com clareza e sem recurso a *software* de folhas de cálculo. Resultados apresentados apenas com recurso a *software* de folhas de cálculo, serão cotadas com zero valores;
- 11 Deve apresentar as respostas pela mesma ordem das questões do enunciado e deve numerar todas as páginas do documento final a submeter na plataforma Moodle;
- 12 Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio e do código da unidade curricular, segundo o exemplo apresentado,
123456efolioA21037.pdf
- De notar que, não são equivalentes as designações seguintes, por exemplo,
123456efolio A21037.pdf ou 123456efolioA-21037.pdf ou 123456efolioestatistica.pdf;
- 13 O ficheiro a enviar não deve exceder 10 páginas, nem 8 MB de memória, e deve ser entregue preferencialmente em formato PDF (Portable Document Format). Utilizadores do sistema operativo Windows podem usar o programa PDFCreator (<https://www.pdfforge.org/pdfcreator/download>). Os restantes utilizadores já têm incorporado um exportador para PDF;
Note-se que não são equivalentes as designações, 123456efolioA21037.pdf ou 123456efolioA21037.docx.
- 14 Deve carregar o referido ficheiro (um e apenas um) para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega;
- 15 Evite a entrega do e-fólio A próxima da hora limite para se precaver contra eventuais problemas. Não existe a possibilidade de entregar o e-fólio A depois do prazo limite definido;
- 16 O e-fólio A é obrigatoriamente entregue no dispositivo da turma onde cada Estudante está afeto, não podendo ser enviado de outro modo;
- 17 O incumprimento de pelo menos uma destas normas ou outras, definidas pela Universidade Aberta, terá como consequência a anulação do e-fólio A, sendo-lhe atribuída a cotação de 0 (zero) valores.

Votos de bom trabalho!
Luís Grilo

Enunciado e Proposta de resolução do e-fólio A

Questão 1

Escolhida uma turma de EPE ao acaso, foram inquiridos os 64 Estudantes inscritos nessa turma sobre o número de vezes que acederam à plataforma da unidade curricular na última semana. Destes Estudantes, 31.25% não responderam, por nunca terem acedido à plataforma Moodle; metade acederam no máximo uma vez; 10 acederam 4 vezes, 2 acederam 5 vezes e os restantes Estudantes apenas acederam 2 vezes à plataforma.

1.1 Após identificar a variável em estudo (quanto ao tipo e quanto à escala), construa a tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas, para este problema. Utilize a tabela de frequências obtida para determinar a percentagem de Estudantes que acederam à plataforma Moodle pelo menos 4 vezes, bem como o número de Estudantes que acederam a um máximo de 2 vezes (inclusive).

Proposta de Resolução

Identificação da variável

$X \equiv$ número de vezes que um determinado estudante acede à plataforma Moodle

Classificação da variável quanto ao tipo: trata-se de uma variável aleatória quantitativa discreta, pois X resulta de um processo de contagem e toma valores discretos de um conjunto finito, $X \in \{0, 1, 2, 4, 5\}$

Classificação da variável quanto à escala: trata-se de uma variável em escala de razão (sendo o zero absoluto, pois representa a ausência de acesso à plataforma Moodle)

Tabela de Frequências

Identificada e classificada a variável em estudo, há que construir a tabela de frequências absolutas e relativas, simples e acumuladas para este problema, o que corresponde a preencher as células da tabela seguinte, onde já se encontra preenchida a primeira coluna, atendendo ao suporte da variável identificado acima,

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
$x_0 = 0$	n_0	f_0	N_0	F_0
$x_1 = 1$	n_1	f_1	N_1	F_1
$x_2 = 2$	n_2	f_2	N_2	F_2
$x_4 = 4$	n_4	f_4	N_4	F_4
$x_5 = 5$	n_5	f_5	N_5	F_5
Total	$n = \sum_i n_i$	$F_5 = \sum_i f_i$	---	---

De acordo com o enunciado do problema, é possível obter os seguintes resultados,
 $n = 64$ Estudantes

$$f_0 = 31.25\% = \frac{31.25}{100} = 0.31250$$

$$F_1 = 0.50$$

$$n_4 = 10$$

$$n_5 = 2$$

$$n_2 = n - n_0 - n_1 - n_4 - n_5$$

Usando esta informação, é, então, possível preencher as restantes células da tabela,

$$f_0 = \frac{n_0}{n} \Leftrightarrow 0.3125 = \frac{n_0}{64} \Leftrightarrow n_0 = 0.3125 \times 64 \Leftrightarrow n_0 = 20$$

$$F_1 = f_0 + f_1 \Leftrightarrow 0.50 = 0.3125 + f_1 \Leftrightarrow f_1 = 0.50 - 0.3125 \Leftrightarrow f_1 = 0.18750$$

$$F_1 = \frac{N_1}{n} \Leftrightarrow 0.50 = \frac{N_1}{64} \Leftrightarrow N_1 = 0.50 \times 64 \Leftrightarrow N_1 = 32$$

$$n_0 + n_1 = N_1 \Leftrightarrow 20 + n_1 = 32 \Leftrightarrow n_1 = 32 - 20 \Leftrightarrow n_1 = 12$$

$$n_2 = n - n_0 - n_1 - n_4 - n_5 \Leftrightarrow n_2 = 64 - 20 - 12 - 10 - 2 \Leftrightarrow n_2 = 20$$

$$N_0 = n_0 = 20$$

$$F_0 = f_0 = 0.31250$$

Como, $f_i = \frac{n_i}{n}$, tem-se,

$$f_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{20}{64} = 0.31250$$

$$f_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{10}{64} = 0.15625$$

$$f_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{2}{64} = 0.03125$$

Dado que, $N_i = N_{i-1} + n_i$, tem-se,

$$N_2 = N_1 + n_2 = 32 + 20 = 52$$

$$N_4 = N_2 + n_4 = 52 + 10 = 62$$

$$N_5 = N_4 + n_5 = 62 + 2 = 64$$

Sabendo que, $F_i = F_{i-1} + f_i$, tem-se,

$$F_2 = F_1 + f_2 = 0.50000 + 0.31250 = 0.81250$$

$$F_4 = F_2 + f_4 = 0.81250 + 0.15625 = 0.96875$$

$$F_5 = F_4 + f_5 = 0.96875 + 0.03125 = 1.00000$$

Afetando os valores às células correspondentes, a tabela solicitada vem dada por,

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i
0	20	0.31250	20	0.31250
1	12	0.18750	32	0.50000
2	20	0.31250	52	0.81250
4	10	0.15625	62	0.96875
5	2	0.03125	64	1.00000
<i>Total</i>	64	1.00000	---	---

Para responder às duas últimas questões desta alínea, recorre-se aos valores da tabela anterior.

- Percentagem de Estudantes que acederam à plataforma Moodle pelo menos 4 vezes ($X \geq 4$):

$$f_4 + f_5 = 0.15625 + 0.03125 = 0.18750 \xrightarrow{(\times 100)} 18.75\%$$

Ou, em alternativa,

$$F_5 - F_2 = 1.00000 - 0.81250 = 0.18750 \xrightarrow{(\times 100)} 18.75\%$$

- Número de Estudantes que acederam a um máximo de 2 vezes ($X \leq 2$):

$$N_2 = 52 \text{ Estudantes}$$

Ou, em alternativa,

$$n_0 + n_1 + n_2 = 20 + 12 + 20 = 52 \text{ Estudantes}$$

R: 18.75% dos Estudantes acederam à plataforma Moodle pelo menos 4 vezes e 52 Estudantes acederam à plataforma Moodle a um máximo de 2 vezes, na última semana.

1.2 Calcule e interprete o valor do coeficiente adequado para avaliar a dispersão relativa da variável em estudo. Considere 5 casas decimais em cálculos intermédios e o resultado final com aproximação a menos de uma milésima.

Proposta de Resolução

O coeficiente adequado para avaliar a dispersão relativa é o coeficiente de variação relativa,

$$CV(\%) = \frac{S}{\bar{x}} \times 100 \approx \frac{1.47605}{1.59375} \times 100 \approx 92.615\%$$

Ou, usando a variância corrigida,

$$CV(\%) = \frac{S'}{\bar{x}} \times 100 \approx \frac{1.48771}{1.59375} \times 100 \approx 93.347\%$$

Cálculos auxiliares

Com intuito de calcular a média e o desvio padrão, podemos acrescentar duas colunas à tabela da questão anterior, com intuito de facilitar os cálculos:

x_i	n_i	f_i	N_i	F_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
0	20	0.31250	20	0.31250	$0 \times 20 = 0$	$0^2 \times 20 = 0$
1	12	0.18750	32	0.50000	$1 \times 12 = 12$	$1^2 \times 12 = 12$
2	20	0.31250	52	0.81250	$2 \times 20 = 40$	$2^2 \times 20 = 80$
4	10	0.15625	62	0.96875	$4 \times 10 = 40$	$4^2 \times 10 = 160$
5	2	0.03125	64	1.00000	$5 \times 2 = 10$	$5^2 \times 2 = 50$
Total	64	1.00000	---	---	102	302

Recorrendo, agora, às fórmulas respetivas, tem-se,

$$\bar{x} = \frac{\sum_i n_i x_i}{n} = \frac{102}{64} = 1.59375 \text{ (vezes que um Estudante acede à plataforma Moodle)}$$

$$n = 64 \text{ (amostra grande)} \Rightarrow S = \sqrt{\frac{\sum_i n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{302}{64} - 1.59375^2} \approx 1.47605 \text{ (vezes que um Estudante acede à plataforma Moodle)}$$

Ou, usando o desvio padrão corrigido,

$$S' = \frac{1}{n-1} \times \sqrt{\sum_i n_i x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{1}{64-1} \sqrt{302 - 64 \times 1.59375^2} \approx 1.48771 \text{ (vezes que um Estudante acede à plataforma Moodle)}$$

1.3 Estude a assimetria da distribuição empírica recorrendo ao coeficiente de assimetria de Pearson, que envolve a mediana (considere o resultado final com aproximação a menos de uma milésima). Classifique, ainda, a distribuição quanto à moda.

Proposta de Resolução

O coeficiente de Assimetria de Pearson (g) que envolve a mediana (Me) é dado por,

$$g = \frac{3 \times (\bar{x} - Me)}{S} \simeq \frac{3 \times (1.59375 - 1.5)}{1.47605} = 0.191 > 0 \Rightarrow \text{Assimetria positiva}$$

Ou, usando o desvio padrão corrigido,

$$g = \frac{3 \times (\bar{x} - Me)}{S'} \simeq \frac{3 \times (1.59375 - 1.5)}{1.48771} = 0.189 > 0 \Rightarrow \text{Assimetria positiva}$$

Cálculos auxiliares

Os valores da média e do desvio padrão (ou desvio padrão corrigido), foram obtidos na alínea anterior.

A mediana é calculada do seguinte modo:

Tratando-se de uma amostra de dimensão par e uma variável discreta ($n = 64$ Estudantes),

$$Me = \frac{\frac{x_n}{2} + \frac{x_{n+1}}{2}}{2} = \frac{\frac{x_{64}}{2} + \frac{x_{64+1}}{2}}{2} = \frac{x_{32} + x_{33}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1.5 \text{ (vezes que um Estudante acede à paltforma Moodle)}$$

Relativamente à moda (Mo), esta corresponde ao valor de x_i que possui maior frequência absoluta. Como $\max n_i = 20$, então,

$Mo = 0$ (vezes que um Estudante acede à paltforma Moodle) e,

$Mo = 2$ (vezes que um Estudante acede à paltforma Moodle)

Como a distribuição da variável apresenta duas modas, então a distribuição é bimodal.

Questão 2

Numa turma de EPE existem seis candidatos a “Representante dos Estudantes” inscritos nesta unidade curricular, aos quais foi atribuído um número de 1 a 6. Sabe-se que a probabilidade de ser selecionado um candidato com número par é o dobro de ser selecionado um candidato com número ímpar. Selecionado um candidato ao acaso, verificou-se qual o seu número. Considere os acontecimentos,

$$\begin{aligned} A &= \{\text{ser candidato com número ímpar}\} \\ B &= \{\text{ser candidato com número primo}\} \end{aligned}$$

Verifique se os acontecimentos A e B são independentes. Apresente os cálculos intermédios e o resultado final na forma de fração irredutível.

Proposta de Resolução

Dois acontecimentos A e B são independentes se e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Neste problema, dado que os acontecimentos elementares não são equiprováveis, não se pode aplicar a definição de Laplace. Deste modo, a probabilidade de cada acontecimento elementar é,

$$\begin{aligned} P(\{1\}) &= P(\{3\}) = P(\{5\}) = x \\ P(\{2\}) &= P(\{4\}) = P(\{6\}) = 2x \end{aligned}$$

Como,

$$P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x + x + 2x + 2x + 2x = 1 \Leftrightarrow 9x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$$

Logo, tem-se,

$$P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\}) = x = \frac{1}{9}$$

$$P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\}) = 2x = \frac{2}{9}$$

Sendo, $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, então, $A \cap B = \{3, 5\}$.

Deste modo, as probabilidades correspondentes são dadas por,

$$P(A) = P(\{1, 3, 5\}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = P(\{2, 3, 5\}) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

$$P(A \cap B) = P(\{3, 5\}) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

O que nos permite calcular,

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27} \neq \frac{2}{9}$$

R: Dado que $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, então os acontecimentos A e B **não** são independentes.

Questão 3

No ano transato a submissão de uma prova, por parte dos Estudantes de EPE na plataforma Moodle, foi 75% das vezes realizada com recurso a telemóvel. As submissões restantes foram efetuadas recorrendo a computador portátil ou com recurso a outros dispositivos, sendo estes dois acontecimentos equiprováveis. Sabe-se ainda que, os Estudantes que usaram computador portátil foram bem-sucedidos na submissão das provas em 98% das vezes, enquanto os Estudantes que recorreram a outros dispositivos não foram bem-sucedidos na submissão da prova em 3/50 das vezes. Além disso, a probabilidade de um Estudante que usa telemóvel não conseguir submeter a prova na plataforma Moodle com sucesso foi de 4%.

Responda a cada questão assumindo que cada Estudante usa apenas um equipamento de *hardware* em cada submissão e, ainda, os acontecimentos seguintes,

$T = \{\text{submeter a prova de EPE com recurso a telemóvel}\}$
 $C = \{\text{submeter a prova de EPE com recurso a computador portátil}\}$
 $D = \{\text{submeter a prova de EPE com recurso a outros dispositivos}\}$
 $S = \{\text{submeter a prova com sucesso}\}$

Nas alíneas seguintes apresente os cálculos intermédios na forma de dízima e o resultado final em percentagem.

3.1 Determine a probabilidade de um Estudante selecionado ao acaso ter conseguido submeter a prova com sucesso na plataforma Moodle.

Proposta de Resolução

Pretende-se calcular,

$$P(S) = ?$$

Sendo S o conjunto de todos os Estudantes inscritos em EPE que submetem uma prova na plataforma Moodle e considerando que cada Estudante usa apenas um equipamento de *hardware* em cada submissão, temos que $T \cup D \cup C = S$ e T, C, D são disjuntos dois a dois. Logo $\{T, C, D\}$ é uma partição de S .

De acordo com o enunciado do problema, tem-se,

$$\left\{ \begin{array}{l} P(T) = 75\% = \frac{75}{100} = 0.75 \\ P(C) = P(D) \\ P(T) + P(C) + P(D) = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ 0.75 + P(C) + P(C) = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ 2P(C) = 1 - 0.75 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ 2P(C) = 0.25 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \\ P(C) = \frac{0.25}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(T) = 0.75 \\ P(D) = 0.125 \\ P(C) = 0.125 \end{array} \right.$$

Tem-se, ainda, que,

$$P(S|C) = 98\% = \frac{98}{100} = 0.98$$

$$P(\bar{S}|D) = \frac{3}{50} = 0.06 = 1 - P(S|D) \Leftrightarrow P(S|D) = 1 - 0.06 = 0.94$$

$$P(\bar{S}|T) = 4\% = \frac{4}{100} = 0.04 = 1 - P(S|T) \Leftrightarrow P(S|T) = 1 - 0.04 = 0.96$$

Deste modo, pelo Teorema das Probabilidades Totais, tem-se,

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap T) + P(S \cap C) + P(S \cap D) \stackrel{\left(P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B) \right)}{=} \\ &= P(S|T) \times P(T) + P(S|C) \times P(C) + P(S|D) \times P(D) = \\ &= 0.96 \times 0.75 + 0.94 \times 0.125 + 0.98 \times 0.125 = \\ &= 0.72 + 0.1175 + 0.1225 = \\ &= 0.96 \rightarrow 96\% \end{aligned}$$

R: A probabilidade de um Estudante escolhido ao acaso ter conseguido submeter a prova com sucesso na plataforma Moodle é de 96%.

3.2 Selecionado um Estudante ao acaso verificou-se que este não submeteu a prova na plataforma Moodle com recurso a telemóvel. Calcule a probabilidade de o Estudante não ter submetido a prova com sucesso.

Proposta de Resolução

Pretende-se calcular,

$$P(\bar{S}|\bar{T}) = ?$$

Tem-se, pela fórmula das probabilidades condicionadas,

$$\begin{aligned} P(\bar{S}|\bar{T}) &= \frac{P(\bar{S} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} \stackrel{\frac{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}}{=} \frac{P(\bar{S}) - P(\bar{S} \cap T)}{1 - P(T)} \stackrel{\frac{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A}) = 1 - P(A)}}{=} \frac{1 - P(S) - [P(T) - P(S \cap T)]}{1 - P(T)} = \\ &= \frac{1 - P(S) - P(T) + P(S \cap T)}{1 - P(T)} \stackrel{\text{(Questão 5.1)}}{=} \frac{1 - 0.96 - 0.75 + 0.72}{1 - 0.75} = \frac{0.01}{0.25} = 0.04 \rightarrow 4\% \end{aligned}$$

Ou, em alternativa,

$$\begin{aligned}
P(\bar{S}|\bar{T}) &= \frac{P(\bar{S} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} \stackrel{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) \text{ (Leis de De Morgan)}}{=} \frac{P(\overline{S \cup T})}{P(\bar{T})} \stackrel{P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 1 - P(A \cap B) \text{ e } P(\bar{A}) = 1 - P(A)}{=} \frac{1 - P(S \cup T)}{1 - P(T)} = \\
&= \frac{1 - [P(S) + P(T) - P(S \cap T)]}{1 - P(T)} \stackrel{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (Teorema de Daniel da Silva)}}{=} \\
&= \frac{1 - P(S) - P(T) + P(S \cap T)}{1 - P(T)} \stackrel{\text{(Questão 5.1)}}{=} \frac{1 - 0.96 - 0.75 + 0.72}{1 - 0.75} = \frac{0.01}{0.25} = 0.04 \rightarrow 4\% \quad (\times 100)
\end{aligned}$$

R: A probabilidade de o Estudante não ter submetido a prova com sucesso, sabendo que não usou telemóvel na submissão da prova na plataforma Moodle é de 4%.

3.3 Selecionado um Estudante ao acaso constatou-se que este submeteu a prova na plataforma com sucesso. Qual o recurso que com maior probabilidade terá sido utilizado pelo Estudante.

Proposta de Resolução

Pretende-se calcular,

$$\text{Max}[P(T|S), P(C|S), P(D|S)] = ?$$

Tem-se, pelo Teorema de Bayes,

$$P(T|S) = \frac{P(T \cap S)}{P(S)} \stackrel{\text{(Questão 3.1)}}{=} \frac{0.72}{0.96} = 0.75 \rightarrow 75\% \quad (\times 100)$$

$$P(C|S) = \frac{P(C \cap S)}{P(S)} \stackrel{\text{(Questão 3.1)}}{=} \frac{0.1225}{0.96} \approx 0.1276 \rightarrow 12.76\% \quad (\times 100)$$

$$P(D|S) = \frac{P(D \cap S)}{P(S)} \stackrel{\text{(Questão 3.1)}}{=} \frac{0.1175}{0.96} \approx 0.1224 \rightarrow 12.24\% \quad (\times 100)$$

Deste modo se conclui que,

$$\text{Max} \{P(T|S), P(C|S), P(D|S)\} = P(T|S) = 75\%$$

R: Sabendo que o Estudante submeteu a prova com sucesso, o dispositivo que terá sido usado com maior probabilidade pelo Estudante foi o telemóvel.

Questão 4

Considere A , B e C três acontecimentos, tais que:

$$P(C) = 0.3; \quad P(B|C) = 0.4; \quad P(\bar{B}|\bar{C}) = 0.8 \quad \text{e} \quad P[A|(B \cap C)] = P[A|(\overline{B \cap C})] = 0.2.$$

Calcule:

4.1 $P(C|B)$

Proposta de Resolução

Recorrendo à fórmula das probabilidades condicionadas, tem-se,

$$P(C|B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{0.12}{0.26} = \frac{6}{13} \approx 0.4615 \rightarrow 46.15\% \quad (\times 100)$$

Cálculos auxiliares:

$$\begin{aligned}
\bullet P(B|C) = 0.4 &\Leftrightarrow \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = 0.4 \Leftrightarrow \frac{P(C \cap B)}{0.3} = 0.4 \Leftrightarrow P(C \cap B) = 0.3 \times 0.4 \Leftrightarrow P(C \cap B) = 0.12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet P(\bar{B} | \bar{C}) &= 0.8 \Leftrightarrow \underset{P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)}{1 - P(B | \bar{C})} = 0.8 \Leftrightarrow \underset{P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{1 - \frac{P(B \cap \bar{C})}{P(\bar{C})}} = 0.8 \Leftrightarrow \underset{P(A \cap \bar{B})=P(A)-P(A \cap B)}{P(A \cap \bar{B})} \\
&\Leftrightarrow 1 - \frac{P(B) - P(B \cap C)}{1 - P(C)} = 0.8 \Leftrightarrow \frac{P(B) - P(B \cap C)}{1 - P(C)} = 1 - 0.8 \Leftrightarrow \frac{P(B) - 0.12}{1 - 0.3} = 0.2 \Leftrightarrow \frac{P(B) - 0.12}{0.7} = 0.2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow P(B) - 0.12 = 0.2 \times 0.7 \Leftrightarrow P(B) - 0.12 = 0.14 \Leftrightarrow P(B) = 0.14 + 0.12 \Leftrightarrow P(B) = 0.26
\end{aligned}$$

$$\mathbf{R:} P(C | B) = \frac{6}{13}$$

Nota: Não estando explícita qualquer aproximação no enunciado o valor solicitado é o exato, pelo que deve ser apresentado na forma de fração irredutível (dado o resultado corresponder a uma dízima infinita não periódica).

4.2 $P[(B \cap C) | A]$

Proposta de Resolução

Recorrendo à fórmula das probabilidades condicionadas, tem-se,

$$P[(B \cap C) | A] = \frac{P(B \cap C \cap A)}{P(A)} = \frac{0.024}{0.2} = \frac{3}{25} = 0.12 \rightarrow 12\% \quad (\times 100)$$

Cálculos auxiliares:

$$\bullet P[A | (B \cap C)] = 0.2 \Leftrightarrow \underset{P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}} = 0.2 \Leftrightarrow \underset{(\text{Questão 4.1})}{\frac{P(A \cap B \cap C)}{0.12}} = 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.2 \times 0.12 \Leftrightarrow P(A \cap B \cap C) = 0.024$$

$$\bullet P[A | (\overline{B \cap C})] = 0.2 \Leftrightarrow \underset{P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}{\frac{P(A \cap \overline{B \cap C})}{P(\overline{B \cap C})}} = 0.2 \Leftrightarrow \underset{\substack{P(A \cap \bar{B})=P(A)-P(A \cap B) \\ P(\bar{A})=1-P(A)}}{\frac{P(A \cap \overline{B \cap C})}{1 - P(B \cap C)}} = 0.2 \Leftrightarrow \underset{(\text{Questão 4.1})}{\frac{P(A \cap \overline{B \cap C})}{1 - P(B \cap C)}} = 0.2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(A) - 0.024}{1 - 0.12} = 0.2 \Leftrightarrow \frac{P(A) - 0.024}{0.88} = 0.2 \Leftrightarrow P(A) - 0.024 = 0.2 \times 0.88 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A) - 0.024 = 0.176 \Leftrightarrow P(A) = 0.176 + 0.024 \Leftrightarrow P(A) = 0.2$$

$$\mathbf{R:} P[(B \cap C) | A] = \frac{3}{25} = 0.12 \rightarrow 12\% \quad (\times 100)$$

Nota: Não estando explícita qualquer aproximação no enunciado o valor solicitado é o exato, pelo que, neste caso pode ser apresentado na forma de fração irredutível, na forma de dízima (dado o resultado corresponder a uma dízima finita), ou na forma de percentagem.

FIM