Comentários sobre a resolução do e-fólio A

1a)

Deduz-se imediatamente da informação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que o domínio da função f é $\mathbb{R}$. Não é preciso, nem é correto, efetuar qualquer análise da função nos dois troços de definição. No entanto, se a pergunta tivesse sido de determinar qual o domínio *natural* da função dada a definição da função f nos dois troços (e sem a informação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), tal análise teria sido necessária. Não foram penalizadas as respostas em que se fez esta análise, desde que a resposta estivesse correta e esta fosse dada em forma simplificada.

1b)

- Para o limite quando $x \to -\infty$, não se pode considerar sem justificação apenas o termo dominante. A forma aconselhada de justificar este limite é de fatorizar $x^4 + x$ como $x(x^3 + x)$ ou $x^4\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)$. Quando $x \to -\infty$ tem-se no primeiro caso que $x \to -\infty$ e prova-se que o segundo fator tende a $-\infty$; no segundo caso tem-se que $x^4 \to +\infty$ e prova-se que o segundo fator converge para 1. Em qualquer dos casos resulta da álgebra dos limites que o limite quando $x \to -\infty$ é $+\infty$.

- Para o limite quando $x \to +\infty$ é necessário justificar que $\frac{\cos(\pi x)}{x^2} \to 0$. Para tal, podemos usar o enquadramento $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\cos(\pi x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ e aplicar o teorema dos limites enquadrados.

1c)

- O estudo da continuidade da função f no seu domínio requer que se estabeleça a continuidade ou não da função f em cada ponto do seu domínio, pelo que é preciso estudar a continuidade da função não só no ponto $x = 2$, mas também em cada ponto das regiões $x < 2$ e $x > 2$. Alguns estudantes poderão ter entendido que o objetivo desta pergunta era apenas de estabelecer se função era ou não contínua, o que seria uma questão diferente. Se a pergunta tivesse sido esta, bastaria ter estabelecido que a função não era contínua no ponto $x = 2$ para se poder concluir que ela não era contínua.

- Para provar a continuidade da função nas regiões $x < 2$ e $x > 2$, é preciso justificar que a sua definição em cada uma dos troços corresponde a uma função contínua. Esta justificação pode ser pelo facto de se tratar de funções elementares, sendo que as funções elementares são contínuas; a prova que cada uma destas funções é elementar é efetuada demonstrando a forma como se pode obter cada uma a partir de funções básicas usando as quatro operações aritméticas e a operação de composição (veja-se as secções 6.5 e 6.6 nas pág. 70-2 da sebenta).

- Para provar que a função não é contínua no ponto $x = 2$, é suficiente mostrar que os limites laterais não são iguais. No entanto, caso a função fosse contínua neste ponto, para prová-lo seria necessário provar não só que os limites laterais são iguais, mas também que o valor da função no ponto $x = 2$ coincide com o valor dos limites laterais.

1d)

- É preciso ter em conta que o cálculo do valor da função nos pontos 0 e 4 requer a utilização da sua definição em cada um dos dois troços. Por outro lado, a taxa de variação média deve ser calculada usando a fórmula aplicada sobre o intervalo inteiro, evitando efetuar um cálculo separado em dois subintervalos.

- Não se podia utilizar máquina de calcular nesta prova. A resposta a esta pergunta deve ser dada em forma de uma fração, sendo que a apresentação do resultado em forma de uma decimal indica a utilização de uma máquina de calcular. Por outro lado, é errada a apresentação de uma resposta em forma de decimal arredondada. As respostas numéricas devem ser exatas; nas instruções não é feita qualquer referência à aceitação de respostas aproximadas.

2)

- Quando se pede para calcular um limite usando a definição de limite, o que se pretende é a utilização da definição formal de limite apresentada no início do documento com os exercícios sobre limites.

- O valor de δ escolhido deve (quase sempre) depender do valor de ϵ, mas não pode depender do valor de x.

4)

- Nesta questão, não poderemos imediatamente concluir que temos $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin(5n)e^{-n}}{n^3} = 0$. Esta igualdade deverá ser provada, por exemplo recorrendo ao teorema dos limites enquadrados.

5)

- Nesta questão, para poderem aplicar o teorema de Bolzano e provar o que é pedido, os estudantes deveriam ter justificado que as funções envolvidas neste exercício são contínua em $\mathbb{R}$.