ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 26 de novembro a 6 de dezembro de 2021

Hora Limite de Entrega

6 de dezembro de 2021, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes. Espaços Vetoriais.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira; deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

Os Grupos II, III e IV têm cotação de **0.5** valores cada.

Os Grupos V e VI têm cotação de **0.75** valores cada.

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

O seu e-fólio não deve ultrapassar 14 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega.
Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. (*1 val.*) Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** $AB = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $CB = 0$

☐ **b)** $ABC = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **d)** $BC = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. Considere os seguintes subconjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}, \\ B &= \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) \in \mathbb{Z}\}, \\ C &= \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : MM^\top = I_2\}, \\ D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \ \text{ e } \ y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Então:

☐ **a)** A, B, C e D são subespaços vetoriais.

☐ **b)** A e B são subespaços vetoriais.

☐ **c)** C e D são subespaços vetoriais.

☐ **d)** D é subespaço vetorial.

3. Sejam A, B e C matrizes de ordem n tais que $\det A = 2$, $\det B = -1$ e $\det C = 3$.

Então:

☐ **a)** $\det(A + B) = 1$

☐ **c)** $\det(AB) = 1$

☐ **b)** $\det(-B) = 1$

☐ **d)** $\det(ABC) = -6$

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

☐ **a)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$ não tem solução.

☐ **b)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema $Ax = b$ tem solução única.

☐ **c)** O sistema $Ax = b$ só tem solução se $\alpha = 0$.

☐ **d)** Se $\alpha = 0$ o sistema $Ax = b$ tem 2 soluções.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. (*0.5 val.*)

Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Determine justificadamente

i) o espaço nulo de A;

ii) uma base para o espaço das colunas de A;

iii) uma base para o espaço das linhas de A;

iv) a característica A;

v) a nulidade de A.

III. (*0.5 val.*)

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 0 \\ kx + y + z = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ determine as soluções de (1).

IV. (*0.5 val.*)

Sem calcular os determinantes mostre justificadamente que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Sugestão: Efetue operações sobre colunas.

V. (*0.75 val.*)

Em $\mathbb{R}_2[x]$ considere os polinómios $u_1 = 11x^2+4x-1$, $u_2 = 9x^2+3x-2$, $u_3 = 3x^2 + 3x + 8$ e $u_4 = 2x^2 + x + 1$. Seja E o espaço gerado por u_1, u_2, u_3 e u_4.

i) Determine justificadamente que condições devem satisfazer as constantes reais a, b e c de modo a que o polinómio $ax^2 + bx + c$ pertença ao espaço E.

ii) Verifique que $v = 15x^2 + 6x + 1$ satisfaz as condições da alínea anterior.

iii) Determine justificadamente a dimensão e uma base de E.

VI. (*0.75 val.*)

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}_n[x]$ e $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ uma base de F.

Considere $q \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $q \notin F$.

Mostre justificadamente que $(p_1, p_2, \ldots, p_n, q)$ é uma base de $\mathbb{R}_n[x]$.

FIM