UNIVERSIDADE ABERTA www.univ-ab.pt

e-Fólio B

cartão de aprendizagem

Física Geral
21048

Instruções para elaboração deste e-Fólio
Documento de texto, .DOC, .PDF ou .PS; fonte 11 ou 12; espaçamento livre; máximo 6 páginas. Pode incluir desenhos, várias cores e pode inclusive juntar elementos aos desenhos do próprio e-Fólio. Para incluir fórmulas pode usar o editor de fórmulas do seu processador de texto ou gerá-las à parte. Entregar até às **23:55 h do dia 25 de janeiro**, por via da plataforma.
Critérios de correção: (para cada questão as percentagens oscilarão nos intervalos indicados) 20 ± 10% Rigor científico da colocação do problema em equação. 40 ± 10% Rigor técnico do código desenvolvido e dos comentários (código não comentário = zero). 40 ± 10% Rigor dos cálculos, expressão e interpretação corretas dos resultados.
Este e-Fólio tem a cotação máxima de 4 valores.

Nos problemas abaixo dê as suas respostas em unidades SI.

Introdução: designa-se por "*equação diferencial de 2ª ordem ordinária e explícita*" equações da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Estas equações são muito comuns em física. Na verdade, a 1 dimensão a expressão $\sum F = ma$ é deste tipo, uma vez que $\sum F = m\frac{d^2x}{dt}$. Quando $\sum F$ é constante, como acontece nos problemas que resolvemos na 1ª parte da UC, a solução desta equação é o movimento retilíneo uniformemente variado. No entanto, este é apenas um caso muito particular: no geral os corpos são sujeitos a forças variáveis. Se estivermos apenas interessados na velocidade dos corpos e as forças não dependerem da posição, a expressão acima reduz-se a uma equação diferencial de 1ª ordem, do tipo $\frac{dv}{dt} = f(t, v)$, que podemos resolver por um método numérico conhecido (Euler, Heun, Runge-Kutta, etc.). Mas se quisermos saber também a posição do corpo, ou se as forças dependerem da posição, torna-se necessário saber integrar numericamente este tipo de equações.

O método de Heun pode ser estendido a equações diferenciais de 2ª ordem passando a equação em causa a um sistema de duas equações diferenciais com uma mudança de variável:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = f(t, x, v) \end{cases}$$

Note-se que a primeira equação não é senão a definição de velocidade a 1 dimensão. As iterações são dadas por (v.s.f.f.)

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}(k_{1x} + k_{2x})h, & k_{1x} = v_i,\ \ k_{2x} = v_i + k_{1v}h \\ v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2}(k_{1v} + k_{2v})h, & k_{1v} = f(t_i, x_i, v_i),\ \ k_{2v} = f(t_i + h, x_i + k_{1x}h, v_i + k_{1v}h) \end{cases}$$

Para iniciar as iterações necessitamos não de um, mas sim dois valores iniciais: a posição inicial, x_0, e velocidade inicial, v_0.

Questão: a equação que descreve o movimento oscilatório (*movimento harmónico simples*) de um corpo de massa *m* ligado a uma mola de constante elástica *k*, sem atrito, é

$$\sum F = ma \rightarrow F_{elast} = -kx = ma \Leftrightarrow -kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

(a) (3,5 val) Implemente, numa linguagem de programação à sua escolha, o algoritmo de Heun para integrar esta equação diferencial. Use massa de 4,0 kg, constante elástica de 1,0 N/m e valores iniciais $x_0 = 1{,}0$ m e $v_0 = 0$.
Execute três corridas de 100 iterações, respetivamente com passos *h* = 1,0 s; *h* = 0,5 s e *h* = 0,1 s.

(b) (1,5 val) Compare os resultados obtidos com a solução analítica, $x(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ e comente.

Nota 1: não necessita de ter tudo certo para obter a cotação máxima de 4 valores.
Nota 2: bónus para quem apresentar gráficos das soluções.

Na sua submissão deste trabalho deve incluir **dois** ficheiros:

1. Um ficheiro de texto (.DOC/.PDF/.PS, etc.) com a resolução do problema, sob a forma de uma tabela de valores para cada iteração, tal como indicado na tabela de resultados abaixo. Se incluir gráficos da solução, devem ser colocados neste ficheiro.
2. O código-fonte da sua implementação, devidamente comentado. Qualquer linguagem de programação será aceite, mas o estudante deve indicar qual a que usou, que versão e sob que sistema operativo trabalhou.

Tabela de resultados

***t* (s)**	***x* (m)**	***v* (m/s)**	k_{1x}	k_{1v}	k_{2x}	k_{2v}	***x* analít. (m)**
0	1	0	0	-0,25	-0,25	-0,25	1
1	...	...	...	...	...	...	...