ANÁLISE INFINITESIMAL | 21175

Período de Realização

Decorre de 31 de outubro a 11 de novembro de 2024.

Data de Limite de Entrega

11 de novembro de 2024, até às 23h55m00s de Portugal Continental

Temas Funções, limites, continuidade, sucessões e método de indução.

Objetivos

Introduzir conceitos fundamentais da análise matemática, tais como as noções de função, de limite e de continuidade de uma função, de sucessões e do método de indução.

Recursos

Podem ser utilizados todos os recursos da unidade curricular bem como o formulário disponibilizado neste e-fólio. Outros textos podem também ser utilizados, desde que referindo explicitamente a fonte. O e-fólio é um trabalho individual.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios:

- rigor formal no uso de fórmulas e de resultados,
- indicação explícita dos cálculos efectuados e correcção dos mesmos,
- clareza e coerência na resolução dos problemas,
- adequada justificação das respostas.

O e-fólio A está cotado para 4 valores, segundo a distribuição:

alínea	1	2	3	4	5	6 a)	6 b)	6 c)	6 d)	total
cotação	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,2	0,6	0,6	0,6	4 val.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio a partir da Folha de Resolução disponibilizada em anexo ao e-fólio e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4. A resolução pode ser manuscrita desde que de uma forma clara e totalmente legível. Nas perguntas de desenvolvimento a apresentação dos cálculos efectuados deve ser feita com clareza e sem recurso a software de folhas de cálculo. *Nas perguntas de escolha múltipla basta apresentar a escolha*.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA. Preferencialmente em formato PDF.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas. Apenas serão avaliadas as provas submetidas dentro do prazo e através do dispositivo E-fólio A.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Clarence Protin, Pamela Pacciani e Inês Legatheaux Martins.

Enunciado dos exercícios a resolver

Escolha múltipla

1. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 - 4)}{|x-3| - 4}\,.$$

   Qual dos conjuntos seguintes representa o domínio da função f ?

   a) $]-\infty,\,-2[\,\cup\,]2,\,7[\,\cup\,]7,\,+\infty[$

   b) $]-\infty,-2[\,\cup\,]7,\,+\infty[$

   c) $]-\infty,-2]\cup[2,\,+\infty[\,\setminus\,\{7\}$

   d) $\{x\in\mathbb{R}\,:\,-2<x<2\}\,\cup\,\{7\}$

2. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contína em $\mathbb{R}$ que satisfaz $f(1)=-2$, $f(0)>f(1)$ e $f(x)>0$, se $x\geq e$. Seja h a função definida por $h(x)=f(e^x)-f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

   Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

   a) A equação $h(x)=0$ tem exactamente uma solução no intervalo $]0,\,1[$.

   b) A equação $f(x)=0$ não tem soluções no intervalo $]0,\,e[$.

   c) A função h tem pelo menos uma raiz no intervalo $]0,\,1[$.

   d) A função f tem exactamente uma raiz no intervalo $]1,\,e[$.

3. Considere a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{3|x-2|}\,, & \text{se } x \leq 1 \\ \\ \frac{\sin(x-1)}{3x(x-1)}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

a) A função f é contínua em $x = 1$.

b) A função f não é contínua em $x = 1$.

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{3}$.

d) A função f é contínua no seu domínio.

4. Considere a sucessão definida recursivamente por:

$$\begin{cases} u_1 = 1. \\ \\ u_{n+1} = (4\sqrt{u_n} + 3)^2\,, & n = 1, 2, 3, \ldots\,. \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

a) $u_n = (4^{n-1} - 1)^2$

b) $u_n = (4^{n+1} - 1)^2$.

c) $u_n = (4^{n-1} - 2)^2$.

d) Nenhuma das afirmações prévias.

5. Considere a função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\frac{1}{x}) + 1 & \text{se } x \in]0, 1[\\ \\ \frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

a) O contradomínio é $[1, +\infty[$ e a inversa é

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{se } x \in]2, +\infty[\\ \\ \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 & \text{se } x \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

b) O contradomínio é $]1, +\infty[$ e a inversa é

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{se } x \in [2, +\infty[\\ \\ \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 & \text{se } 1 < x < 2\,. \end{cases}$$

c) O contradomínio é $]1, +\infty[$ e a inversa é

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{se } x \in]2, +\infty[\\ \\ \sqrt{\frac{1}{x-1}} & \text{se } x \in]1, 2]\,. \end{cases}$$

d) O contradomínio é $]1, +\infty[$ e a função não tem inversa porque não é injectiva.

Desenvolvimento

6. Consider a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) - 4x^2 - 1, & \text{se } x \geq 0 \\ \\ x^2(3 + e^{\frac{1}{x}}), & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

a) Determine o domínio de f.

b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

c) Mostre que f é contínua no ponto 0.

d) Mostre que existe $x \in [0, \pi]$ tal que $f(x) = -1$.

FIM