Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre dia 23 de Junho de 2021, das 10:00 às 11:30

Enunciado

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1 (5 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = X + Y$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} Y - X \leq 0 \\ 2X - Y \leq 8 \\ X \geq 1 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos (determinação de todas as restrições, intersecção das restrições, curvas de nível da função objectivo, sentido de crescimento da função objectivo, determinação de ponto(s) óptimo(s),...).

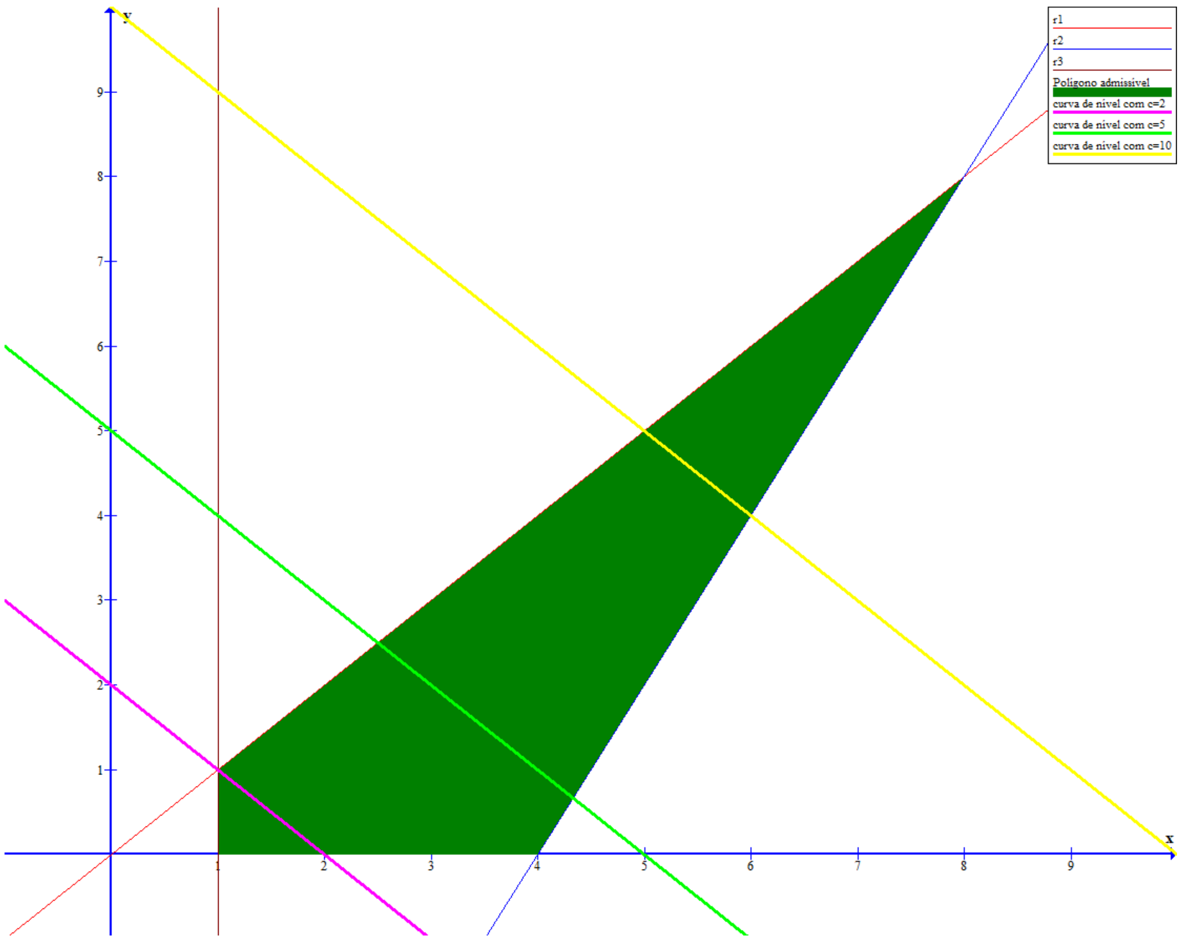
Resolução:

O primeiro passo para resolver o problema pelo método gráfico é desenhar o polígono admissível, tendo em conta as restrições. Tendo em conta que $X, Y \geq 0$, o polígono admissível encontra-se no primeiro quadrante.

A recta correspondente à primeira restrição é $Y - X = 0 \Leftrightarrow Y = X$, ou seja é a bissectriz dos quadrantes ímpares. Como a primeira restrição é equivalente a $Y \leq X$, estamos interessados no semiplano abaixo da recta.

A recta correspondente à segunda restrição é dada pela equação $2X - Y = 8 \Leftrightarrow Y = 2X - 8$, ou seja, é a recta de declive 2 que cruza o eixo vertical no ponto $(0, -8)$. Como a segunda restrição é equivalente a $Y \geq 2X - 8$, estamos interessados no semiplano acima da recta.

A recta correspondente à terceira restrição é dada pela equação $X = 1$, ou seja, é a recta vertical que cruza o eixo horizontal no ponto $(1, 0)$. Como a terceira restrição é $X \geq 1$, estamos interessados no semiplano à direita da recta.
Assim, o polígono admissível é a região do primeiro quadrante que resulta da intersecção do semiplano abaixo da recta $Y = X$ com o semiplano acima da recta $Y = 2X - 8$ e com o semiplano à direita da recta $X = 1$.



Para descobrir o ponto(s) do polígono admissível onde F assume o valor máximo, temos de perceber quais são as curvas de nível de F e em que sentido cresce.

Curvas de nível de F (com $c \in \mathbb{R}$ constante):

$$F(X,Y) = c \Leftrightarrow X + Y = c \Leftrightarrow Y = -X + c$$

Assim, as rectas de nível da função F são as rectas de declive -1. Pela expressão da função F, à medida que o valor de Y aumenta, sai que o valor de F aumenta. Assim, no gráfico seguinte, representa-se a violeta, verde e amarelo três rectas de nível de F, assim como o sentido de crescimento.

Assim, pelo sentido de crescimento da função F, percebe-se facilmente que o ponto do polígono em que a função F assume o valor mais elevado é o ponto na intersecção das rectas correspondentes às restrições 1 e 2.

$$\begin{cases} Y - X = 0 \\ 2X - Y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = X \\ 2X - X = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = X \\ X = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = 8 \\ Y = 8 \end{cases}$$

Assim, o ponto óptimo é o ponto $(8, 8)$, correspondente a $X^* = 8$ e $Y^* = 8$ e em que o valor máximo de F é $F^* = X^* + Y^* = 16$.

b) Utilize o método do simplex para resolver o problema. Justifique cuidadosamente todos os cálculos.

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = X + Y + 0F_1 + 0F_2 + 0F_3 - M\alpha$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} -X + Y + F_1 = 0 \\ 2X - Y + F_2 = 8 \\ X - F_3 + \alpha = 1 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema tem uma desigualdade $\geq$, na forma standard é necessário acrescentar uma variável artificial na terceira restrição. O problema vai ser resolvido pelo método das penalidades.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ_i
	F_1	-1	1	1	0	0	0	0	
	F_2	2	-1	0	1	0	0	8	
		1	0	0	0	-1	1	1	
$l_4 - Ml_3$	$-F$	-1	-1	0	0	0	M		
$l_1 + l_3$	F_1	-1	1	1	0	0	0	0	
$l_2 - 2l_3$	F_2	2	-1	0	1	0	0	8	4
	α	1	0	0	0	-1	1	1	1 $\leftarrow$
	$-F$	-1-M	-1	0	0	M	0	-M	
		$\uparrow$							
	F_1	0	1	1	0	-1	1	1	1 $\leftarrow$
$l_2 + l_1$	F_2	0	-1	0	1	2	-2	6	
	X	1	0	0	0	-1	1	1	
$l_4 + l_1$	$-F$	0	-1	0	0	-1	1+M	1	
			$\uparrow$						
$l_1 + l_2$	Y	0	1	1	0	-1	1	1	
	F_2	0	0	1	1	1	-1	7	7 $\leftarrow$
$l_3 + l_2$	X	1	0	0	0	-1	1	1	
$l_4 + 2l_2$	$-F$	0	0	1	0	-2	2	2	
						$\uparrow$			
	Y	0	1	2	1	0	0	8	
	F_3	0	0	1	1	1	-1	7	
	X	1	0	1	1	0	0	8	
	$-F$	0	0	3	2	0	0	16	

Em cada passo do método, escolhe-se para entrar na base a variável que apresenta o valor negativo mais baixo na linha de $-F$. Sai da base a variável que apresenta o valor Δ_i mais baixo.

Como na linha da função $-F$ já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de F, $F^* = 16$, quando $X^* = 8$, $Y^* = 8$ e $F_3^* = 7$.
Note-se que o valor na linha de $-F$ correspondente às variáveis de folga F_1 e F_2 (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução óptima é única.

c) O que se poderia concluir se o quadro final após a resolução do problema for a seguinte.

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
Y	0	1	2	1	0	0	8	
F_3	0	0	1	1	1	-1	7	
X	1	0	1	1	0	0	8	
$-F$	0	0	0	2	0	M	16	

Resolução:

Como todos os valores da linha de $-F$ são não negativos, então o método termina. No entanto, verificamos que F_1 é uma variável não básica com valor nulo na linha $-F$, concluindo assim que a solução óptima não é nula. Seja $(X_1^*, Y_1^*) = (8, 8)$ uma das soluções óptimas. Para encontrar outra solução óptima, continuamos o método do simplex, fazendo entrar na base a variável F_1.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
$\frac{1}{2}l_1$	Y	0	1	2	1	0	0	8	$4 \leftarrow$
$l_2 - \frac{1}{2}l_1$	F_3	0	0	1	1	1	-1	7	7
$l_3 - \frac{1}{2}l_1$	X	1	0	1	1	0	0	8	8
	$-F$	0	0	0	2	0	M	16	
				$\uparrow$					
	F_1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
	F_3	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	-1	3	
	X	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4	
	$-F$	0	0	0	2	0	M	16	

O método volta a parar porque não há valores não nulos na linha de $-F$. Neste caso, obtemos como solução óptima $(X_2^*, Y_2^*) = (4, 0)$ com $F^* = 16$.

Como vimos, a solução óptima não é única, sendo que existem infinitas soluções óptimas no segmento de recta definido por (X_1^*, Y_1^*) e (X_2^*, Y_2^*). Assim, a solução óptima é dada por

$$(X^*, Y^*) = (1 - \lambda)(8, 8) + \lambda(4, 0) = (8 - 4\lambda, 8 - 8\lambda), \qquad \text{com } \lambda \in [0, 1],$$

sendo $F^* = 16$.

2 (3 val.) Num posto de testes COVID, o teste é realizado apenas por um enfermeiro. A chegada dos utentes segue uma distribuição de Poisson, com uma taxa média de chegada de 5 pessoas a cada meia hora. Os utentes são atendidos de acordo com a disciplina FIFO e estão dispostos a esperar o necessário para serem atendidos. A estimativa do tempo gasto por exame é exponencialmente distribuída, com um tempo médio de 4 minutos.

a) Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado, justificando detalhadamente a caracterização.

Resolução:
Trata-se de um sistema $M/M/1$ (População=∞, Fila máxima=∞) porque tanto o processo de chegada de utentes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1 porque tem apenas um enfermeiro a realizar o exame.
Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = \frac{1}{6}$ utentes por minuto (10 utentes por hora).
Duração do serviço com distribuição Exponencial com taxa de atendimento de $\mu = \frac{1}{4}$ utentes por minuto (4 minutos por exame).
População de chamadas ilimitada.
Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

b) Determine a probabilidade de se formar uma fila de espera.

Resolução:

Para termos fila de espera, tem de existir pelo menos 2 utentes no posto, um a ser atendido e o outro em fila de espera. Assim,

$$P(utentes \geq 2) = 1 - P(utentes < 2) = 1 - (P_0 + P_1)$$

Sendo $\lambda = \frac{1}{6}$ e $\mu = \frac{1}{4}$, sai que a taxa de pressão é dada por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1 \quad \surd$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P_1 = \rho P_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Assim,

$$P(utentes \geq 2) = 1 - P_0 - P_1 = 1 - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \sim 44,4\%$$

c) Determine o tamanho médio da fila de espera.

Resolução:

O tamanho médio na fila de espera é dado por

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3} \text{ utentes.}$$

3 (3 val.)

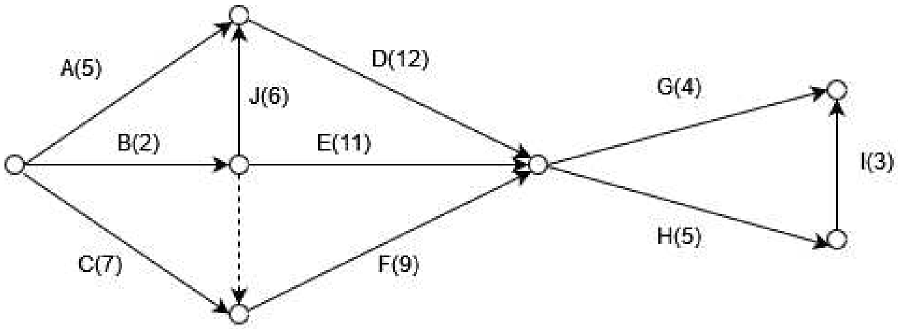
Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte.

Actividade	Precedências	Duração (u.t.)
A	—	5
B	—	2
C	—	7
D	A, J	12
E	B	11
F	B, C	9
G	D, E, F	4
H	D, E, F	5
I	H	3
J	B	6

a) Desenhe a rede do projecto.

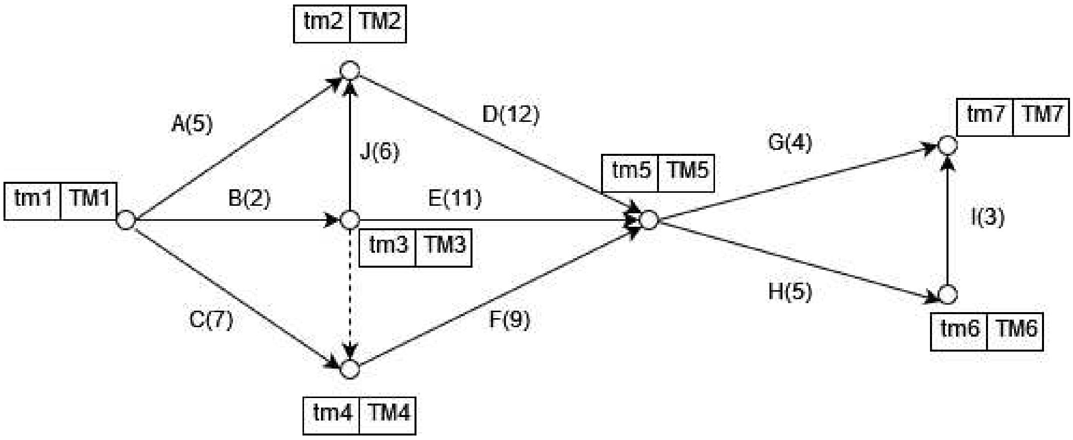
Resolução:

Existem 3 actividades sem precedências, portanto sabemos que essas saem do nó inicial: A, B e C. As actividades que vão ter ao nó final são aquelas que não são precedência de nenhuma outra actividade: G e I.



b) Determine o caminho crítico do empreendimento e a duração do projecto.

Resolução:



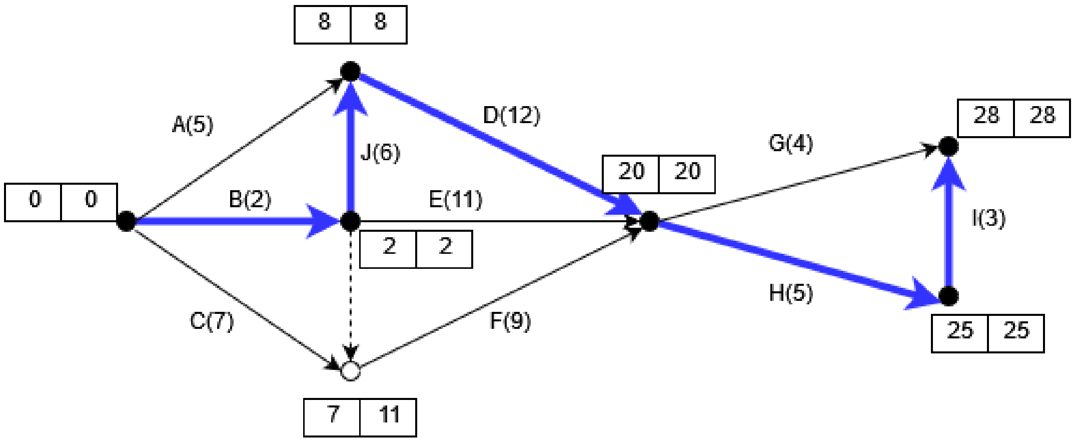
Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = \max\{tm_1 + 5, tm_3 + 6\} = \max\{5, 8\} = 8$
$tm_3 = tm_1 + 2 = 2$
$tm_4 = tm_1 + 7 = 7$
$tm_5 = \max\{tm_2 + 12, tm_3 + 11, tm_4 + 9\} = \max\{20, 13, 16\} = 20$
$tm_6 = tm_5 + 5 = 25$
$tm_7 = tm_6 + 3 = 28$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_7 = tm_7 = 28$ (nó final)
$TM_6 = TM_7 - 3 = 25$
$TM_5 = \min\{TM_7 - 4, TM_6 - 5\} = \min\{24, 20\} = 20$
$TM_4 = TM_5 - 9 = 11$
$TM_3 = \min\{TM_4, TM_5 - 11, TM_2 - 6\} = \min\{11, 9, 2\} = 2$
$TM_2 = TM_5 - 12 = 8$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 5, TM_3 - 2, TM_4 - 7\} = \min\{3, 0, 4\} = 0$

Conclui-se assim que a duração total média do projecto é 28 unidades de tempo.

Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



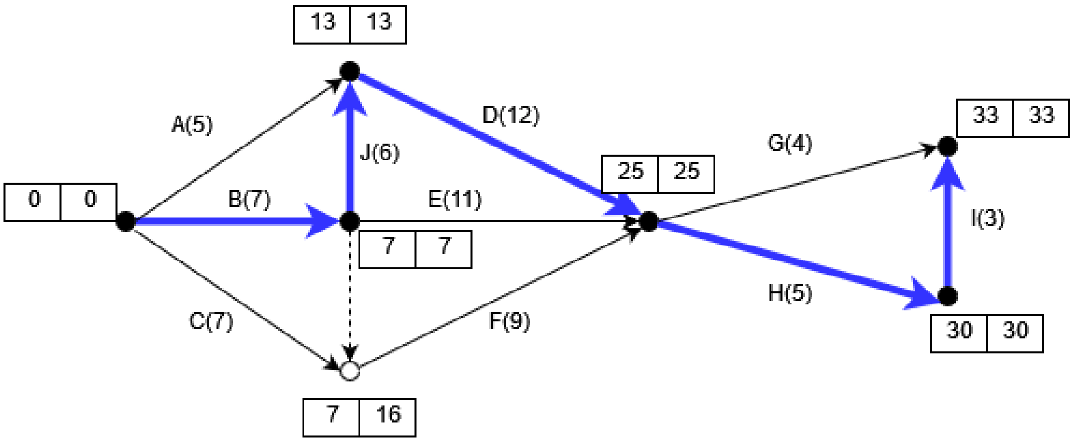
Marcou-se a preto os nós críticos, em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 6 nós críticos: 1, 2, 3, 5, 6 e 7. As actividades que unem estes nós são candidatas a actividades críticas. Para serem actividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da actividade (para não ahver folgas).

Actividade	tm(i+1)-tm(i)	Duração	Conclusão
A	$tm_2 - tm_1 = 8$	5	actividade não crítica
B	$tm_3 - tm_1 = 2 - 0 = 2$	2	actividade crítica
J	$tm_2 - tm_3 = 8 - 2 = 6$	6	actividade crítica
D	$tm_4 - tm_2 = 20 - 8 = 12$	12	actividade crítica
E	$tm_4 - tm_3 = 20 - 2 = 18$	11	actividade não crítica
G	$tm_7 - tm_5 = 28 - 20 = 8$	4	actividade não crítica
H	$tm_6 - tm_5 = 25 - 20 = 5$	5	actividade crítica
I	$tm_7 - tm_6 = 28 - 25 = 3$	3	actividade crítica

Conclui-se que as actividades B, J, D, H e I são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas actividades B, J, D, H e I.

c) A tarefa B precisa de uma matéria-prima cuja entrega teve um atraso de 5 dias. Quais as consequências para a conclusão do projecto?

Resolução:



Como a actividade B é crítica e precisa de mais 5 dias para ser concluída, então todo o projecto vai atrasar 5 dias, como se pode ver no diagrama acima.

4 (1 val.) Em Gestão de Projectos, os tempos das várias actividades não costuma ser determinístico, mas sim aleatório. Diga como proceder num caso destes, indicando o método a usar e as hipóteses em que assenta.

Resolução:

No caso em que o tempo das actividades não é determinístico usa-se a técnica PERT, que assenta em 3 hipóteses:

Hip1: as durações das várias actividades são independentes entre si

Hip2: as durações das várias actividades têm distribuições normais

Hip3: a duração total de um projecto pode considerar-se reduzida à duração do Caminho Crítico Médio (CCM), o que é o caminho crítico obtido ao assumir que as durações das várias actividades são iguais aos respectivos valores médios.

FIM