U.C. 21002

Álgebra Linear I

29 de janeiro de 2018

- O exame é composto por **5** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II**, **III**, **IV**, e **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**
3.0 val.	3.0 val.	8.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Então:

- ☐ a) Se A é diagonalizável então tem n valores próprios distintos.
- ☐ b) Se A tem n valores próprios distintos então é diagonalizável.
- ☐ c) A tem n valores próprios distintos se e só se é diagonalizável.
- ☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

Questão 2

Sejam A, B e $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(i) Se $AB = BC$ e A é invertível então $B = C$.

(ii) Se A e B são invertíveis então $A + B$ também é invertível.

(iii) Se A tem os elementos da diagonal principal todos iguais a 1 então A é invertível.

(iv) Se A é invertível então A^3 também é invertível.

Então:

- ☐ a) Só 1 das afirmações anteriores é verdadeira.
- ☐ b) Só 2 das afirmações anteriores são verdadeiras.
- ☐ c) Só 3 das afirmações anteriores são verdadeiras.
- ☐ d) Todas as afirmações anteriores são verdadeiras.

Questão 3

Seja A uma matriz quadrada e $p(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)$ o seu polinómio característico. Então:

- ☐ a) $\det A = 2$.
- ☐ c) $A + A^{-1} = 0$.
- ☐ b) $A^{-1} = A$.
- ☐ d) $\det A = -2$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Sejam G e H subespaços de um espaço linear E, tais que $F \cap G = \{0\}$. Então:

- ☐ a) $\dim G = \dim H$.
- ☐ b) $\dim G + \dim H = \dim E$.
- ☐ c) $\dim G + \dim H = 5$.
- ☐ d) $\dim G + \dim H = \dim(G + H)$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é tal que $A + A^2 + A^3$ é invertível, então A também é invertível.

b) Se $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem os valores próprios 1 e -1 então $A^2 = I_2$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & & & = & -4 \\ & - & y & + & z & - & w & = & 0 \\ -2x & - & y & + & 4z & + & 2w & = & 7 \\ 4x & + & 3y & & & + & w & = & -10 \end{array}\right.$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: ....
Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....
Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Seja $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$.

a) Escolha uma base para $\mathbb{R}_2[x]$ e mostre que os vetores que escolheu são linearmente independentes.

b) Determine a matriz A que representa T na base que escolheu na alínea anterior, na partida e na chegada.

c) Determine a dimensão e uma base para o núcleo de T.

d) Determine a dimensão e uma base para a imagem de T.

e) Verifique que o Teorema da Dimensão é satisfeito.

f) Determine os valores próprios da matriz A.[1]

g) Determine os vetores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

h) Será a matriz A diagonalizável? Justifique.

V. Sejam A e $B \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $A^\top B$ é invertível. Mostre que então o sistema $BX = 0$ tem uma solução única, $X = 0$.

FIM

[1] *Se não determinou a matriz A*, considere nesta alínea e nas seguintes a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.