Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 28 de Março a 2 de Abril de 2023

Data de Limite de Entrega

2 de Abril de 2023, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Programação linear

Competências

Deve demonstrar ter capacidade para aplicar os Métodos Gráfico e Simplex na resolução de problemas de Programação Linear.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores distribuídos de acordo com o enunciado.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **nove** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Clarence Protin

Enunciado

1. (1.0 val.)

Uma empresa de escavações trabalha em dois locais diferentes. Num dos locais escava terra e no outro areia. Dados anteriores mostram que 1000 m^3 de terra têm um lucro de 57 unidades monetárias (u.m.), enquanto que 1000 m^3 de areia tem um lucro de 60 u.m.

A empresa possui dois tipos distintos de máquinas para escavar - máquina A e máquina B e emprega 5 trabalhadores para trabalhar nas escavações (além dos condutores das máquinas).

Para escavar 1000 m^3 de terra são necessárias 8 horas de trabalho da máquina A, 4 horas de trabalho da máquina B e 50 horas realizadas por trabalhadores.

Para escavar 1000 m^3 de areia são necessárias 4 horas de trabalho da máquina A, 5 horas de trabalho da máquina B e 13 horas realizadas por trabalhadores.

A empresa tem um horário de trabalho de 40 horas semanais por trabalhador e por máquina.

Pretende-se saber como deverá a empresa alocar os seus recursos para maximizar os lucros semanais. Formalize o problema, justificando todos os passos.

Resolução:
Variáveis de decisão:
X: quantidade de terra escavada semanalmente (1000 m^3);
Y: quantidade de areia escavada semanalmente (1000 m^3);

Função objetivo, a maximizar (lucro):

$$F(X, Y) = 57X + 60Y,$$

sabendo que cada 1000 m^3 de terra tem um lucro de 57 um (unidade monetária) e cada 1000 m^3 tem um lucro de 60 um.

Restrições:
$8X + 4Y \leq 40$ — a máquina A trabalha no máximo 4 horas por semana
$4X + 5Y \leq 40$ a máquina B trabalha no máximo 4 horas por semana
$50X + 13Y \leq 5 \times 40 = 200$ existem 5 trabalhadores e cada um trabalha no máximo 40 horas por semana
$X, Y \geq 0$ condições de não negatividade.

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F = 57X + 60Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 8X + 4Y \leq 40 \\ 4X + 5Y \geq 40 \\ 50X + 13Y \leq 200 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

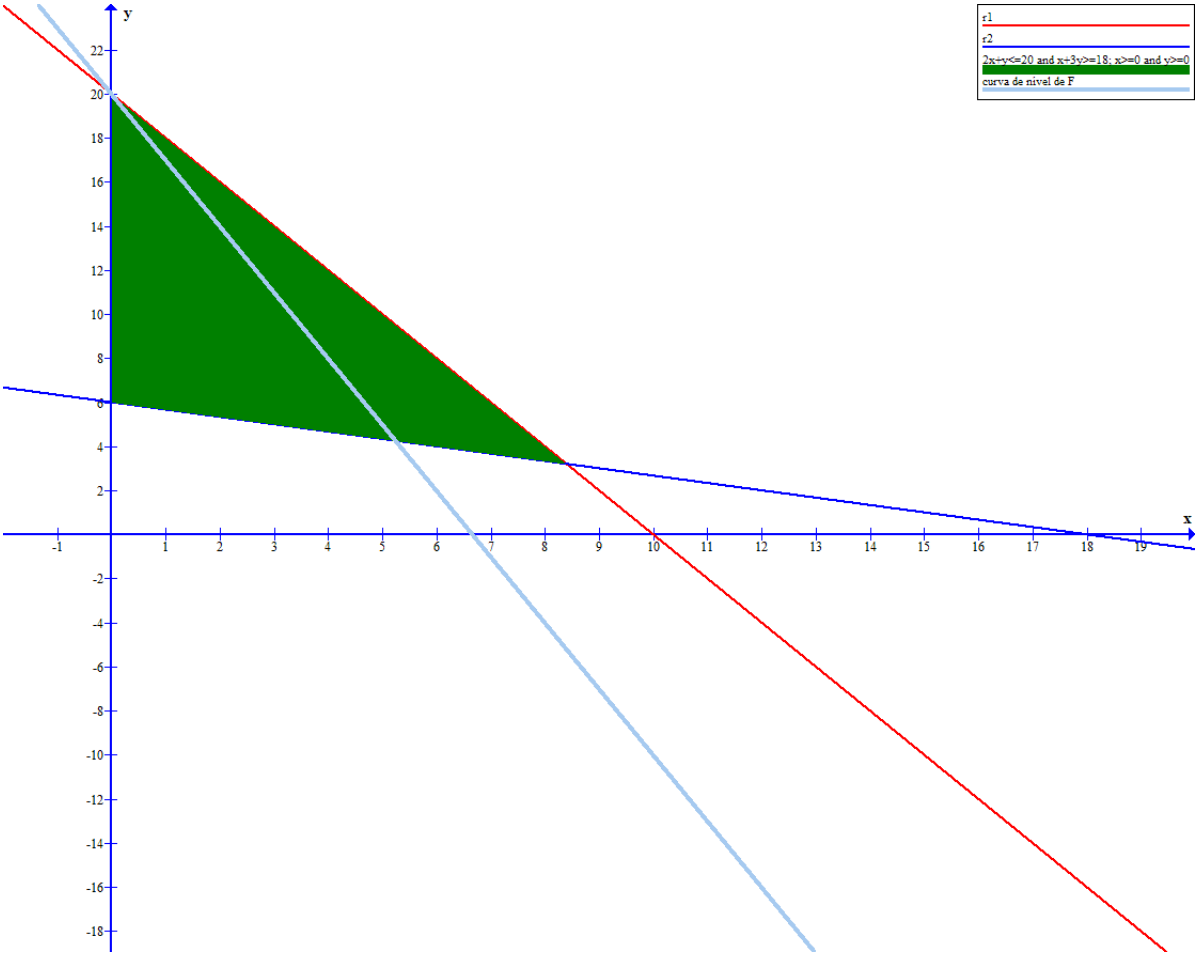
$$\max F = 3X + Y$$

sujeito a

$$\begin{cases} 2X + Y \leq 20 \\ X + 3Y \geq 18 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) (1.0 val.) Representando o gráfico, identifique a área de soluções possíveis e a solução ótima.

Resolução:
A reta $2X + Y = 20$ passa nos pontos $(0, 20)$ e $(10, 0)$.
A reta $X + 3Y = 18$ passa nos pontos $(0, 6)$ e $(18, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $3X + Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -3X + z.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Na figura acima, pode ver-se uma curva de nível (reta azul claro). O valor de F aumenta à medida que a reta azul se desloca para cima. Assim, o ponto ótimo é o ponto que está na intersecção das retas r_1 e r_2:

$$\begin{cases} 2X + Y = 20 \\ X + 3Y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 20 - 2X \\ X + 3(20 - 2X) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ X + 60 - 6X = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 5X = 42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ X = \frac{42}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = 20 - 2\,\frac{42}{5} = \frac{16}{5} \\ X = \frac{42}{5} \end{cases}$$

$$(X^*, Y^*) = \left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

com $F^* = F(X^*, Y^*) = \frac{142}{5}$.

b) (0.5 val.) Considere agora que o objetivo é minimizar (mantendo a mesma área de soluções possíveis e os mesmos coeficientes da função objetivo). Qual a nova solução?

Resolução:
Para determinar o mínimo, note-se que a função objetivo diminui à medida que a curva de nível de F se desloca para baixo. Nesse caso, o mínimo é obtido no ponto em que a reta r_2 intersecta o eixo vertical, ou seja, no ponto $(0, 6)$.

c) (1.5 val.) Supondo agora que pretende resolver o problema (inicial) pelo algoritmo Simplex, resolva o problema pelo método das 2 fases. Justifique todos os cálculos.

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = 3X + Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} 2X + Y + F_1 = 20 \\ X + 3Y - F_2 + \alpha = 18 \\ X, Y, F_1, F_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Fase 1:

$$\min A = \alpha \;\Leftrightarrow\; \max B = -\min A = -\alpha$$

base	X	Y	F_1	F_2	α	TI	Δ		
F_1	2	1	1	0	0	20			
	1	3	0	-1	1	18	18		
B	0	0	0	0	1	0			$(l_3 - l_2)$
F_1	2	1	1	0	0	20	20		$(l_1 - \frac{1}{3}l_2)$
α	1	3	0	-1	1	18	6	$\leftarrow$	$(\frac{1}{3}l_2)$
B	-1	-3	0	1	0	-18			$(l_3 + l_2)$
		$\uparrow$							
F_1	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	14			
Y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	6			
B	0	0	0	0	1	0			

Neste ponto, a fase 1 termina e passamos para a fase 2:

base	X	Y	F_1	F_2	TI	Δ	
F_1	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	14		
	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	6		
Z	-3	-1	0	0	0		$(l_3 + l_2)$
F_1	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	14	$\frac{42}{5} \leftarrow$	$(\frac{3}{5}l_1)$
Y	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	6	18	$(l_2 - \frac{1}{5}l_1)$
Z	$-\frac{8}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	6	6	$(l_3 + \frac{8}{5}l_1)$
	$\uparrow$						
X	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{42}{5}$		
Y	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$		
Z	0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{142}{5}$		

Assim, obtemos a solução óptima:

$(X^*, Y^*) = \left(\frac{42}{5}, 3\right)$ com $F^* = \frac{142}{5}$.

FIM