Lógica e Teoria de Conjuntos-Resolução| 21079

Enunciado

1. Considere o seguinte critério de convergência conhecido por "Critério d'Alembert":

"Seja $\sum a_k$ uma série de termos positivos tal que $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \bar{\mathbb{R}}$. Então

- se $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente;
- se $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ ou $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = +\infty$ ou $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^+$, a série $\sum a_k$ é divergente;
- se $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^-$, o teste é inconclusivo."

Considere as seguintes proposições:

p: "$\sum a_k$ é uma série de termos positivos."
q: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \in \bar{\mathbb{R}}$"
r: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$"
s: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$"
t: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^+$"
m: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = 1^-$"
l: "$\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = +\infty$"
u: "A série $\sum a_k$ é absolutamente convergente."
v: "A série $\sum a_k$ é divergente."
w: "O teste é inconclusivo."

(a) Escreva o Critério d'Alembert na linguagem do cálculo proposicional.

Resolução: O Critério d'Alembert pod ser escrito através da seguinte fbf $(p \wedge q) \to ((r \to u) \wedge ((s \vee l \vee t) \to v) \wedge (m \to w))$. Outra possibilidade seria apresentar a fórmula sem parênteses supérfluos: $p \wedge q \to (r \to u) \wedge (s \vee l \vee t \to v) \wedge (m \to w)$.

(b) Seja α a fbf $u \to (q \wedge r)$. Indique, justificando, se α é consequência lógica da fórmula que obteve na alínea (a).

Resolução: A fbf α não é consequência lógica da fbf obtida na alínea a). Basta, por exemplo, pensarmos na atribuição de valores lógicos em que todos os símbolos $p, q, s, t, m, l, u, v, w$ são verdadeiros e apenas o símbolo r é falso. Nessa situação a fórmula da alínea a) é verdadeira (implicação de antecedente e consequentes verdadeiros) mas a fórmula α é falsa (implicação de antecedente verdadeiro e consequente falso).

(c) Traduza para linguagem natural (português corrente) a fbf α da alínea anterior.

Resolução: Se a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente então $\lim_{k\to+\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}|$ pertence a $\bar{\mathbb{R}}$ e é estritamente menor que 1.

(d) É legítimo concluir que, dado que temos o Critério d'Alembert, a proposição que obteve na alínea (c) é verdadeira? Justifique a sua resposta.

Resolução: Não. Como vimos na alínea (b), a proposição da alínea (c) não é consequência lógica do Critério d'Alembert.

2. Considere o seguinte conjunto de fbf

$$\{\, p \to \neg q,\ r \wedge q\ , q \to (p \vee r)\,\}.$$

(a) Indique, justificando, se o conjunto acima, de fbf, é satisfazível.

Resolução: O conjunto de fbf é satisfazível pois existe uma atribuição de valores de verdade aos símbolos proposicionais (p falso, q verdadeiro e r verdadeiro) que torna todas as fbf do conjunto verdadeiras em simultâneo.

(b) Substituindo no conjunto dado a primeira fbf pela sua contra-recíproca, o conjunto seria satisfazível? Justique a sua resposta.

Resolução: O enunciado pede para substituirmos, no conjunto inicialmente dado, a fbf $p \to \neg q$ pela sua contra-recíproca, ou seja por $\neg\neg q \to \neg p$, que como sabemos é logicamente equivalente a $q \to \neg p$. Dado que uma fbf e a sua contra-recíproca são logicamente equivalentes e portanto têm os mesmos valores de verdade para as mesmas atribuições de valores lógicos aos símbolos proposicionais, imediatamente pela alínea (a) concluímos que (mesmo com a alteração) o conjunto de fórmulas é satisfazível. A atribuição 0,1,1, a p,q,r respetivamente torna todas as fbf do conjunto verdadeiras em simultâneo.

3. Sejam α a fbf $\neg p \to q \vee (\neg q \wedge (q \to r))$, β a fbf $p \wedge \neg r \wedge (p \to r)$ e γ a fbf $(p \to q) \to p$.

(a) Como classifica as fbf α, β e γ em termos de tautologia, contingência ou contradição? Justifique a sua resposta.

Resolução: Em primeiro lugar, tenhamos em conta que a fbf α é $\neg p \to (q \vee (\neg q \wedge (q \to r)))$ dado que a disjunção tem precedência sobre a implicação e a fbf β é $(p \wedge \neg r) \wedge (p \to r)$ dado que se faz associação à esquerda. Para resolvermos este exercício, poderíamos calcular as tabelas de verdade das três fbf e verificar que, no primeiro caso, a última coluna é só constituída por 1's pelo que α é uma tautologia, no segundo caso a última coluna da tabela de verdade é só constituída por zeros pelo que β é uma contradição e no terceiro caso a última coluna contém 0's e 1's pelo que γ é uma contingência.

Outra forma de resolver a questão era de cada uma das fórmulas dadas chegar, por equivalências lógicas, a outras fbf cuja classificação seja conhecida.

Sigamos este último caminho:

$$\begin{array}{rcl} \neg p \to q \vee (\neg q \wedge (q \to r)) & \Leftrightarrow & \neg p \to q \vee (\neg q \wedge (\neg q \vee r)) \\ & \Leftrightarrow & \neg p \to q \vee \neg q \\ & \Leftrightarrow & \neg p \to (q \vee \neg q) \end{array}$$

que é uma tautologia por se tratar de uma implicação de consequente sempre verdadeiro. Logo α é uma tautologia.

$$\begin{array}{rcl} p \wedge \neg r \wedge (p \to r) & \Leftrightarrow & p \wedge \neg r \wedge (\neg p \vee r) \\ & \Leftrightarrow & p \wedge ((\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge r)) \\ & \Leftrightarrow & p \wedge (\neg r \wedge \neg p) \\ & \Leftrightarrow & (p \wedge \neg p) \wedge \neg r \end{array}$$

que é uma contradição pois trata-se de uma conjunção com algo que sabemos ser sempre falso. Concluímos assim que β é uma contradição.

$$\begin{array}{rcl} (p \to q) \to p & \Leftrightarrow & (\neg p \vee q) \to p \\ & \Leftrightarrow & (p \wedge \neg q) \vee p \end{array}$$

Facilmente nos apercebemos que a fbf a que chegámos é uma contingência pois com p verdadeiro fica verdadeira, mas com p falso fica falsa. Assim, γ é uma contingência.

(b) É possível encontrar fbf δ, ϵ e θ tais que substituindo em α, os símbolos proposicionais p, q e r respetivamente por δ, ϵ e θ se obtenha uma contradição? Se sim apresente-as, se não justifique.

Resolução: Não é possível. Sabemos por dictum de omni que, substituindo numa tautologia os símbolos proposicionais por quaisquer fbf obtemos sempre tautologias.

(c) É possível encontrar fbf θ e τ tais que substituindo em γ os símbolos proposicionais p e q respetivamente por θ e τ se obtenha uma tautologia? Se sim apresente-as, se não justifique.

Resolução: Sim, é possível. Basta tomar θ como sendo uma fórmula sempre verdadeira, isto é, uma tautologia e q uma qualquer fórmula. Por exemplo θ como sendo $r \to r$ e τ como sendo s.

4. **(a)** Complete a seguinte demonstração formal no sistema de dedução natural (notação de Lemmon), incluindo todas as fbf e justificações necessárias.

-	1	$\neg\alpha \to \beta$	hip.
-	2	$\gamma \to (\delta \vee \epsilon)$	hip.
-	3	$\delta \to \neg\gamma$	hip.
-	4	$\alpha \to \neg\epsilon$	hip.
$\{5\}$	5	γ	hip. [$\to$I]
$\{5\}$	6	$\gamma \to (\delta \vee \epsilon)$	2, $\surd$
$\{5\}$	7	$\delta \vee \epsilon$	5, 6 [$\to$E]
$\{5, 8\}$	8	δ	hip. [$\vee$E]
$\{5, 8\}$	9	$\delta \to \neg\gamma$	3, $\surd$
$\{5, 8\}$	10	$\neg\gamma$	8, 9 [$\to$E]
$\{5, 8\}$	11	γ	5, $\surd$
$\{5, 8\}$	12	$\perp$	10, 11 [$\neg$E]
$\{5, 8\}$	13	β	12 [efq]
$\{5, 14\}$	14	ϵ	hip. [$\vee$E]
$\{5, 14, 15\}$	15	α	hip. [$\neg$I]
$\{5, 14, 15\}$	16	$\alpha \to \neg\epsilon$	4, $\surd$
$\{5, 14, 15\}$	17	$\neg\epsilon$	15, 16 [$\to$E]
$\{5, 14, 15\}$	18	ϵ	14, $\surd$
$\{5, 14, 15\}$	19	$\perp$	17, 18 [$\neg$E]
$\{5, 14\}$	20	$\neg\alpha$	15-19, [$\neg$ I]
$\{5, 14\}$	21	$\neg\alpha \to \beta$	1, $\surd$
$\{5, 14\}$	22	β	20, 21 [$\to$E]
$\{5\}$	23	β	7, 8-13, 14-22 [$\vee$ E]
-	24	$\gamma \to \beta$	5-23 [$\to$ I]

(b) Usando o símbolo $\vdash$, indique o que prova a dedução da alínea (a).
Resolução: $\neg\alpha \rightarrow \beta, \gamma \rightarrow (\delta \vee \epsilon), \delta \rightarrow \neg\gamma, \alpha \rightarrow \neg\epsilon \vdash \gamma \rightarrow \beta$

FIM