U.C. 21021

Computação Numérica

19 de fevereiro de 2018

INSTRUÇÕES

- Leia estas instruções na totalidade antes de iniciar a resolução da prova.
- O enunciado da prova é constituído por 5 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Se o seu exemplar não estiver completo ou nele se verificar qualquer outra deficiência, por favor dirija-se ao professor vigilante.
- A prova deve ser resolvida na sua totalidade em folhas de respostas.
- Nas respostas, tenha a preocupação de utilizar uma letra legível.
- Todas as respostas devem ser escritas unicamente com caneta azul ou preta.
- A prova é SEM CONSULTA. Todos os elementos necessários à resolução são fornecidos no enunciado.
- Para a execução da prova é INDISPENSÁVEL a utilização de calculadora.
- As cotações são indicadas por grupo e nas próprias questões.
- As respostas devem ser claras, indicando todos os passos e cálculos intermédios necessários à compreensão da resolução de cada questão. À simples indicação do resultado é atribuída a cotação zero.
- Nas questões de escrita de programas, a sua correção terá em conta critérios de proficiência e compreensibilidade do código (legibilidade, indentação, estrutura, comentários e explicação geral).
- O não cumprimento das instruções implica a anulação das respetivas questões.
- O tempo de realização da prova é de 150 minutos.

Grupo I [3 valores]

1.1. [1.5] Considere $x = 0.712384\ldots$ e a aproximação $\overline{x} = 0.0.7123$. Determine limites superiores ϵ_{LS}, r_{LS} respetivamente para os erros absoluto $\epsilon \leq \epsilon_{LS}$ e relativo $r \leq r_{LS}$. Os limites devem ser os menores possíveis para a precisão dada para x e $\overline{x}$.

1.2. [1.5] Considere um cone com raio da base $r = 2$, altura $h = 6$ e volume $V = \pi r^2 h/3$. Estime o valor máximo do erro absoluto na medida do raio de modo a que resulte um erro absoluto máximo do volume de $\epsilon_V = 1.56$ resultante da propagação do erro inicial. Considere que o erro na medida da altura é 1%. Apresente o seu resultado com quatro algarismos significativos.

Grupo II [3 valores]

2. Considere a seguinte equação,

$$0.5 - \sin(x) = 0$$

2.1. [1] Mostre que a equação dada tem uma única raiz no intervalo $[0, \pi/2]$.

2.2. [1.5] Obtenha uma aproximação do valor dessa raiz aplicando duas iterações do método de Newton a partir do valor inicial $x_0 = 0$. Construa uma tabela onde constem os valores necessários de $k, x_k, f(x_k), f'(x_k)$ para $k = 0, 1, 2$.

2.3. [0.5] Determine uma estimativa do erro para a aproximação da raiz determinada na alínea anterior.

Grupo III [2 valores]

3. Considere a matriz A e o vetor b seguintes,

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -14 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3.1. [2] Resolva o sistema de equações lineares $Ax = b$ utilizando o método de eliminação de Gauss com escolha parcial de pivot. Indique claramente as operações elementares realizadas em cada passo da resolução.

Grupo IV [4 valores]

4. Considere a seguinte tabela de valores correspondente a uma função f(x),

x	$f(x)$
0.4	0.148420
0.5	0.223144
0.6	0.307485
0.8	0.494696

4.1. [2] Obtenha o polinómio p_2 de grau dois interpolador de $f(x)$ nos nós 0.4, 0.6 e 0.8 através da fórmula de Newton com diferenças divididas.

4.2. [2] Obtenha uma estimativa do erro de interpolação para $x = 0.7$.

Grupo V [8 valores]

5.1. [1.5] Apresente um pequeno programa em Octave, com um único ciclo, que crie a matriz A a partir da concatenação de vetores coluna. Utilize os operadores e funções que achar necessários para a criação dos vetores(não devem ser criados elemento a elemento).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 7 & 6 & & 21 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 6 & 6 & \dots & 21 \\ 3 & 2 & 3 & 6 & 5 & 6 & & 21 \end{bmatrix}$$

5.2. [1.5] Considere as funções $f(x) = \cos(x)$ e $g(x) = x^2$. Apresente um pequeno programa em Octave que crie um gráfico conjunto das funções $f(x)$ e $g(x)$, com $f(x)$ para x de -1 a 1 com intervalos de 0.01, $g(x)$ para x de 0 a 1 com intervalos de 0.02 e com as seguintes características:

- $f()$ a traço contínuo de cor preta, com legenda;
- $g()$ a ponteado de cor verde, com legenda;
- com grelha;
- o ponto (0.5, 0.25) deve ser assinalado com um marcador tipo bola, de cor azul;
- o eixo das abcissas deve ter a etiqueta "x";
- o título do gráfico deve ter a etiqueta "$f(x), g(x)$".

5.3. [5] Escreva uma função em Octave `[r,e]=sqrtsec(a,emax)` que aceite um nº positivo a como argumento e que recorrendo ao método da secante determine e retorne o valor da sua raiz quadrada positiva $r = +\sqrt{a}$. A função aceita também como segundo argumento um valor máximo para o erro $emax$ e retorna o erro e da raiz determinada. Dica: Encontre uma função $f(x)$ tal que a solução de $f(x) = 0$ seja a raiz desejada.

FORMULÁRIO

Fatorização $A = LU$

$$u_{1,j} = a_{1,j} \quad j \geq 1$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/u_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} u_{k,j} \quad j \geq i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{j,k} u_{k,i})/u_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fatorização (Cholesky) $A = LL^T$

$$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$$

$$l_{i,1} = a_{i,1}/l_{1,1} \quad i \geq 2$$

$$l_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2} \quad i \geq 2$$

$$l_{j,i} = (a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} l_{j,k})/l_{i,i} \quad j > i \geq 2$$

Fórmula Interpoladora de Lagrange

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L(x_i)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=0,\, j \neq i}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças divididas

$$p_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]$$

$$\cdot (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})$$

Fórmula Interpoladora de Newton diferenças descendentes

$$p_n(x_0 + sh) = f_0 + s\Delta_0 + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta_0^2 + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots(s-n+1)}{n!}\Delta_0^n$$

FIM