UNIVERSIDADE ABERTA www.uab.pt

# ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

**Período de Realização**

Decorre dia 11 de fevereiro de 2021 das 15h00 às 17h30 de Portugal Continental

**Data de Limite de Entrega**

11 de fevereiro de 2021, até às 17h30 de Portugal Continental

**Conteúdos**

Álgebra Linear

**Competências**

Saber aplicar os conceitos e técnicas de Álgebra Linear indicados no programa na formulação e resolução de problemas de natureza teórica e na resolução de problemas matemáticos.

**Trabalho a desenvolver**
**Critérios de avaliação e cotação**

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste E-fólio Global é de 12 valores.

**Normas a respeitar**

Deve redigir o seu E-fólio Global na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 15 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioG.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio Global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

**I.** Questões de escolha múltipla. (*3 valores*)

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

## Questão 1

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ x & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

Então:

- ☐ a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $A$ é invertível.
- ☐ b) $\det A = x$.
- ☐ c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(4A) = 3 \det A$.
- ☐ d) $A$ é invertível se e só se $x \neq 0$.

## Questão 2

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x, y, x)$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (z, y)$.

Então:

- ☐ a) $\operatorname{Nuc}(f \circ g) = \langle (1, 1, 0) \rangle$.
- ☐ b) $\operatorname{Nuc}(g \circ f) = \langle (1, 1) \rangle$.
- ☐ c) A matriz que representa $g \circ f$ na base canónica é $I_2$.
- ☐ d) $\operatorname{Nuc} f \neq \operatorname{Nuc}(g \circ f)$.

## Questão 3

Sejam $F$ e $G$ os subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$ definidos por $F = \langle (0, 1, 1),\ (1, 2, 3) \rangle$ e $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$.

Então:

- ☐ a) $\dim(F + G) = 3$.
- ☐ b) $\dim(F \cap G) = 1$.
- ☐ c) $F = G$.
- ☐ d) $F \neq G$.

## Questões de desenvolvimento

| |
|---|
| Justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter. |

**II.** (*1,5 valores*) Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizável tal que $A^2 = 0$, então $A = 0$.

**III.** (*3 valores*) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Mostre justificadamente que 1 e $-1$ são os únicos valores próprios da matriz $A$.

b) Determine justificadamente os espaços próprios associados aos valores próprios 1 e $-1$.

c) Mostre justificadamente que a matriz $A$ é diagonalizável.

**IV.** (*3 valores*)

Considere a aplicação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine justificadamente a matriz que representa $T$ em relação à base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Determine o conjunto das matrizes $B$ tais que $T(B) = 0$.

c) Determine a dimensão da imagem de $T$.

d) Determine se $T$ é invertível, e em caso afirmativo determine a imagem inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

**V.** (*1,5 valores*)

Seja $p(x) = x(1 - x^2)$ o polinómio característico da matriz $A$. Mostre que existem vetores não nulos $u$ e $v$ tais que $A(u + v) = v$.

FIM