

U.C. 21082

Matemática Finita

13 de setembro de 2017

- INSTRUÇÕES -

- O exame é composto por 9 grupos de questões, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- As questões de escolha múltipla deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos 5, 6, 7, 8 e 9 deverão ser respondidas na folha de ponto. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à sua identificação deverão ser preenchidos, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O exame tem a duração máxima de 2 horas e 30 minutos.**

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com excepção das 4 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores. A distribuição da cotação pelos restantes grupos de questões é a seguinte:

Grupo 5	Grupo 6	Grupo 7	Grupo 8	Grupo 9
4.30	2.0	3.20	1.50	5.0

RESPONDA ÀS QUESTÕES SEGUINTE NA FOLHA DE PONTO

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

5. Pretende-se formar uma comissão de 8 elementos a partir de um grupo de 12 homens e de 15 mulheres. De quantas maneiras podemos formar essa comissão de modo que...

5.1. ... qualquer elemento pode integrar essa comissão;

5.2. ... a comissão integre 4 homens e 4 mulheres;

5.3. ... a comissão integre pelo menos um homem.

6. Mostre que

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 = n \binom{2n-1}{n}, \quad n \geq 1.$$

7. Considere $n^3 - n$, $n \in \mathbb{N}$.

7.1. Por recurso ao método de indução matemática mostre que 3 é um divisor de $n^3 - n$.

7.2. Verifique que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ é um múltiplo de 6.

8. Sem utilizar o algoritmo de Euclides, mostre que $\text{mdc}(72683, 28) = 1$.

9. Considere a sucessão $\langle a_n \rangle$ definida por

$$a_n = 8a_{n-1} - 7a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

para $a_0 = 2$ e $a_1 = 20$.

9.1. Determine o termo geral da sucessão.

9.2. Por recurso ao método de substituição de diante para trás prove que $\langle a_n \rangle$ é solução da fórmula de recorrência

$$a_n = 7a_{n-1} + 6, \quad n \geq 1$$

para $a_0 = 2$.

9.3. Mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, 18 é um divisor de $a_n - 2$.

FORMULÁRIO

- **Lei de Pascal**

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Revisão trinomial**

$$\binom{n}{l} \binom{l}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{l-k}$$

- **Fórmula da extracção**

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- **Teorema binomial**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

- **Adição paralela**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{k} = \binom{r+n+1}{n}$$

- **Adição do índice superior**

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

- **Adição alternada do índice inferior**

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

- **Convolução de Vandermonde**

$$\sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$$

FIM