Elementos de Análise Infinitesimal 2 | 21031

Período de Realização

Decorre de 24 de abril a 1 de maio de 2020

Data de Limite de Entrega

1 de maio de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

Temas

Tópico 1 da UC.

Objetivos

Testar o domínio, por parte do estudante, dos conteúdos correspondentes ao tópico indicado supra.

Critérios de avaliação e cotação

Para a avaliação das respostas constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

1. 1,5 valor
2. 0,4 valor
3. 0,6 valor
4. 1,0 valor

5. 0,5 valor

Total: 4,0 valores

Normas a respeitar

Todas as páginas do seu documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 12 páginas A4

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Fernando Pestana da Costa

Trabalho a desenvolver

1. Esclareça se os seguintes limites existem ou não e, caso existam, determine o seu valor:

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^3-y^2}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(xy)}{y-x^2}$.

2. Estude a continuidade da função f definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão

$$f(x,y)=\begin{cases}(\sin y)\cos\frac{x}{y}, & \text{se } y\neq 0\\ 0, & \text{se } y=0.\end{cases}$$

3. Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja $\mathfrak{D}$ o conjunto das funções diferenciáveis $f : D \to \mathbb{R}$ definidas em D.

a) Mostre que não existe $f \in \mathfrak{D}$ tal que, para algum $\mathbf{a} \in D$ fixo, se tenha $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) > 0$ para todos os vetores não nulos $\mathbf{v}$.

b) Dê um exemplo de uma $f \in \mathfrak{D}$ tal que, para algum vetor não nulo $\mathbf{v}$ fixo e para todos os $\mathbf{x} \in D$, se tem $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}) > 0.$

4. Determine, se existirem, ou justifique porque não existem, as derivadas parciais de primeira ordem da função $\varphi(x, y) = \exp(x + y \sin(x))$ num ponto arbitrário (x, y) do seu domínio.
Estude φ quanto à diferenciabilidade.
Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de φ quando $(x, y) = (0, 0)$.

5. Considere as funções dadas pelas expressões

$$u(x, y, z) = (yz, xz), \qquad v(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{xy}\right).$$

Determine o domínio da função $u \circ v$, justifique que esta função é aí diferenciável e determine a sua matriz jacobiana por dois modos distintos:

a) determinando primeiro $u \circ v$ explicitamente;

b) pelo teorema de derivação da função composta.

FIM

RESOLUÇÃO

1.a) Para termos uma ideia do que podemos esperar, comecemos por calcular o que acontece ao longo de retas não verticais, ou seja, calculemos o limite quando $(x, y) \to (0, 0)$ sendo $y = mx$ para qualquer $m \in \mathbb{R}$ fixo:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} x\frac{1 + m^3}{1 + m^2} = 0.$$

Portanto, se o limite existir deverá ser igual a 0. Vejamos se assim é recorrendo à definição: pretendemos verificar se a afirmação seguinte é verdadeira:

$$\forall\delta > 0, \exists\varepsilon > 0 : \|(x, y) - (0, 0)\| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0\right| < \delta. \qquad (1)$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| &\leqslant \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} = \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2}\,x^2 + \sqrt{y^2}\,y^2}{x^2 + y^2} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\,x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}\,y^2}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \\ &= \|(x, y) - (0, 0)\|,\end{aligned}$$

conclui-se imediatamente que, dado um δ, se tomarmos $\varepsilon = \delta$ tem-se

$$\|(x, y) - (0, 0)\| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0\right| \leqslant \|(x, y) - (0, 0)\| < \varepsilon = \delta,$$

provando-se o pretendido. Conclui-se, assim, que o limite desta alínea existe e é igual a 0.

1.b) Neste caso adoptemos a mesma estratégia da alínea anterior e vejamos o que acontece ao longo de retas não verticais passando pelo ponto limite $(0, 0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=mx}} \frac{x^3 + y^2}{x^3 - y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + m^2x^2}{x^3 - m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x + m^2}{x - m^2} = \begin{cases} -1 & \text{se } m \neq 0 \\ 1 & \text{se } m = 0 \end{cases}.$$

Como o limite segundo retas $y = mx$ depende do valor de m podemos imediatamente concluir que o limite em causa não existe.

1.c) Podemos começar por observar que, para $x = 0$ (e y qualquer não nulo) ou $y = 0$ (e x qualquer não nulo) a função em causa é sempre igual a 0, pelo que o limite indicado é também 0. Considere-se agora x e y tais que $xy \neq 0$. Então

$$\frac{\tan(xy)}{y - x^2} = \frac{\sin(xy)}{xy} \frac{1}{\cos(xy)} \frac{xy}{y - x^2}.$$

Observe-se agora que $\left|\frac{\sin u}{u}\right| \leqslant 1$ e, usando coordenadas polares $y = r\sin\theta, x = r\cos\theta$ têm-se os seguintes limites quando $r \to 0$ (e que estes são *independentes* de θ):

$$\cos(xy) = \cos(r^2 \cos\theta \sin\theta) \to 1$$

e

$$\frac{xy}{y - x^2} = \frac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r\sin\theta - r^2\cos^2\theta} = r\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta - r\cos^2\theta} \to 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(xy)}{y - x^2}\right| &\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left|\frac{\sin(xy)}{xy}\right| \times \left|\frac{1}{\cos(xy)}\right| \times \left|\frac{xy}{y - x^2}\right|\right) \\
&\leqslant \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\left|\frac{1}{\cos(xy)}\right| \times \left|\frac{xy}{y - x^2}\right|\right) \\
&= \lim_{r\to 0} \left|\frac{1}{\cos(r^2\cos\theta\sin\theta)}\right| \times \lim_{r\to 0}\left|r\frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta - r\cos^2\theta}\right| \\
&= 1 \times 0 \,=\, 0
\end{aligned}$$

e conclui-se daqui que o limite do enunciado existe e é igual a zero.

2. Considere-se primeiro a continuidade em pontos (x, y) com $y \neq 0$. Atendendo a que função racional $(x, y) \mapsto \frac{x}{y}$ é contínua no seu domínio (que é $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \neq 0\}$) e que as funções trigonométricas seno e cosseno são contínuas em $\mathbb{R}$, e atendendo à continuidade do produto e da composição de funções contínuas concluímos que f é contínua em todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $y \neq 0$. Para ver o que se passa em pontos com $y = 0$, ou seja, em pontos do tipo $(x_0, 0)$, teremos de investigar se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x, y) = f(x_0, 0).$$

Se for este o caso, f será contínua. Se não se verificar esta igualdade

f será descontínua em $(x_0, 0)$. Como se tem

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0,0)| &= |f(x,y)| \\
&\leqslant \left|\sin(y)\cos\left(\tfrac{x}{y}\right)\right| = |\sin(y)| \left|\cos\left(\tfrac{x}{y}\right)\right| \\
&\leqslant |\sin(y)| \\
&\leqslant |y| = \sqrt{y^2} = \sqrt{(y-0)^2} \\
&\leqslant \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-0)^2} = \|(x,y) - (x_0,0)\|
\end{aligned}$$

é óbvio que, escolhendo $\varepsilon = \delta$, se tem

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \|(x,y) - (x_0,0)\| < \varepsilon \Longrightarrow ||f(x,y) - f(x_0,0)|| < \delta,$$

pelo que se conclui que f é também contínua em pontos de $\mathbb{R}^2$ com $y = 0$ e, portanto, f é contínua em todo o $\mathbb{R}^2$.

3.a) Seja f uma função arbitrária de $\mathfrak{D}$. Fixe-se $\mathbf{a}$ e suponha que para o vetor unitário $\mathbf{u}$ tem-se $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) > 0$. Como

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a})\mathbf{u} = -\nabla f(\mathbf{a})(-\mathbf{u}) = -D_{-\mathbf{u}}f(\mathbf{a}),$$

é claro que não é possível ter-se $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) > 0$ para todos os vetores unitários $\mathbf{v}$ pois se tal se verificar para um dado vetor, não se poderá verificar para o seu simétrico.

3.b) Um exemplo simples possível é $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ e $\mathbf{v} = (1, 0, \ldots, 0)$. Então, para qualquer $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, tem-se

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = (1, 1, \ldots, 1) \cdot (1, 0, \ldots, 0) = 1 > 0.$$

4. Sendo as funções reais de variável real $u \mapsto e^u$ e $u \mapsto \sin u$ função continuamente diferenciáveis[1] e sabendo que somas, produtos e composições de funções continuamente diferenciáveis resultam em funções continuamente diferenciáveis, podemos garantir que para cada y fixo a função $x \mapsto \varphi(x,y)$ é diferenciável (como função de x) e para cada x fixo a função $y \mapsto \varphi(x,y)$ é diferenciável (como função de y); ou seja, para qualquer (x,y) as derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ existem e são contínuas. Adicionalmente, a constatação de que as erivadas parciais existem e são contínuas permite concluir que φ é diferenciável em todo o $\mathbb{R}^2$.

[1] Ou seja: são diferenciáveis e a sua derivada é contínua.

As derivadas parciais são

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}e^{x+y\sin x}=e^{x+y\sin x}\frac{\partial}{\partial x}(x+y\sin x)=(1+y\cos x)e^{x+y\sin x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}e^{x+y\sin x}=e^{x+y\sin x}\frac{\partial}{\partial y}(x+y\sin x)=(\sin x)e^{x+y\sin x}.$$

O plano tangente ao gráfico de φ em $(0,0)$ tem equação

$$z=\varphi(0,0)+\nabla\varphi(0,0)\cdot(x-0,y-0)$$

ou seja

$$z=1+(1,0)\cdot(x,y)\;\Leftrightarrow\; z=1+x.$$

5. Das expressões dadas tem-se $D_u=\mathbb{R}^3$ e $D_v=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0\wedge y\neq 0\}$. Portanto,

$$\begin{aligned}D_{u\circ v}&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\in D_v\wedge v(x,y)\in D_u\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\in D_v\wedge v(x,y)\in\mathbb{R}^3\}\\&=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x,y)\in D_v\}\\&=D_v.\end{aligned}$$

Como todas as componentes de u e de v são funções polinomiais ou racionais, sabemos que são continuamente diferenciáveis nos seus domínios. Consequentemente, as suas derivadas parciais são cont'inuas, pelo que quer u, quer v são funções diferenciáveis nos seus domínios e, pelo teorema de diferenciabilidade da função composta, a sua composição $u\circ v$ é uma função diferenciável no seu domínio.

5.a) Como temos

$$(u\circ v)(x,y)=u\big(x,y,\frac{1}{xy}\big)=\big(y\frac{1}{xy},x\frac{1}{xy}\big)=\big(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\big)$$

concluimos que

$$D(u\circ v)(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x}\\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{y} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{x^2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{y^2}\end{bmatrix}$$

5.b) Pelo teorema de diferenciabilidade da função composta sabemos que

$$D(u\circ v)(x,y)=Du(v(x,y))\,Dv(x,y).$$

Como

$$Du(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad Dv(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{yx^2} & -\frac{1}{xy^2} \end{bmatrix}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} D(u \circ v)(x,y) &= Du(v(x,y))\, Dv(x,y) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{xy} & y \\ \frac{1}{xy} & 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{yx^2} & -\frac{1}{xy^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$