

Nome:

B. I.: N^o de Estudante:

Curso:

Unidade Curricular: Processos Estocásticos Aplicados Código: 21089

Data: Ano Lectivo: 2014/15

Docente: Maria João Oliveira Classificação:

PARA A RESOLUÇÃO DO e-Fólio A, ACONSELHA-SE QUE:

- Imprima este documento (não necessariamente a cores).
- Preencha devidamente o cabeçalho do exemplar.
- O e-Fólio é composto por três grupos de questões, num total de 2 páginas e termina com a palavra FIM. As suas respostas às questões deste e-Fólio não devem ultrapassar 10 páginas.
- Escreva sempre com letra legível.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um documento único em **formato PDF**, que inclua esta folha de rosto e as suas respostas, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em “e-Fólio A” até ao dia 20 de Abril.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:

- A cotação total deste e-Fólio é de **4 valores**.
- Para a correcção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correcção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e correctamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático correctos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

1. Mostre que um processo estocástico fortemente estacionário é estacionário em média e em covariâncias, desde que existam os respectivos segundos momentos.
2. Dada uma constante $0 < H < 1$, seja $\{X_t^H := X_t : t \geq 0\}$ um processo com incrementos estacionários tal que $X(0) = 0$ e

$$E[X_t] = 0, \quad E[X_t^2] = t^{2H}, \quad \forall t > 0.$$

2.1. Mostre que

$$\text{cov}[X_t, X_s] = \frac{1}{2} \{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\}, \quad \forall s, t > 0.$$

- 2.2.** Prove que se $\{X_t : t \geq 0\}$ tiver incrementos independentes, então $H = \frac{1}{2}$ e $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo de Markov.
 - 2.3.** Suponha que o processo $\{X_t : t \geq 0\}$ é gaussiano. Dado $a > 0$, mostre que, para cada $t > 0$, $X(at)$ e $a^H X(t)$ têm a mesma distribuição.
 - 2.4.** Averigüe sob que condições $\{X_t : t \geq 0\}$ é um processo de Wiener.
3. Sejam $\{X_t : t \geq 0\}$ um movimento browniano e $b > 0$ uma constante tal que $X(b) \neq 0$. Dado $a > 0$, considere o processo estocástico $\{Y_t : t \geq 0\}$,

$$Y_t = X(at + b), \quad \forall t \geq 0.$$

Mostre que:

- 3.1.** Cada Y_t , $t > 0$, tem distribuição normal.
- 3.2.** $\{Y_t : t \geq 0\}$ tem incrementos estacionários, mas não tem incrementos independentes.

FIM