

# Exercícios

17 de Janeiro de 2011

## 1 Continuidade

1. Prove que a função real  $f$  de variável real definida por  $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(2x)}{x} - 2, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$ , é contínua no ponto 0.

2. Considere a função real de variável real definida por

$$F(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x < 3 \\ \frac{3}{x}, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

- 2.1. Determine o domínio de  $F$ .

- 2.2. Indique os valores de  $x$  para os quais  $F(x) > 0$ .

- 2.3. Diga, justificando, qual o valor lógico da seguinte afirmação:

“Existe pelo menos um zero da função no intervalo  $]0, 3[$ ”.

- 2.4. Averigue se a função  $F$  é contínua no ponto 2.3.

3. Dada a função  $G$ , real de variável real, definida por

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2+x} - 2}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ m, & \text{se } x = 2 \end{cases}, \text{ determine o valor de } m \text{ para o qual } G \text{ é uma função}$$

contínua em  $\mathbb{R}$ .

4. Considere as seguintes funções reais de variável real:

$$F_1(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad F_2(x) = \frac{2 + \cos(x)}{2 - \cos(x)}.$$

**4.1.** Estude a função  $F_1$  quanto à sua continuidade.

**4.2.** Determine o conjunto dos valores  $x$  para os quais a função  $F_2$  é contínua em  $x$ .

**4.3.** Que conclusões é que pode tirar sobre a continuidade das funções compostas  $F_1 \circ F_2$  e  $F_2 \circ F_1$ ?

**5.** Dado  $m \in \mathbb{R}$  qualquer, fixo, considere o polinómio

$$p(x) = x^2 - mx - 4.$$

Sabendo que existem dois pontos  $a \in \mathbb{R}$  e  $b \in \mathbb{R}$  para os quais se tem  $p(a) \cdot p(b) < 0$ , prove que:

**5.1.** O polinómio  $p$  tem exatamente dois zeros em  $\mathbb{R}$ .

**5.2.** Um dos zeros está localizado entre  $a$  e  $b$ .

**5.3.** Será que ambos os zeros podem localizar-se entre  $a$  e  $b$ ? Justifique.

**6.** Mostre que a função real  $h$  de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2 - 4x}{x}, & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ tem um máximo e um mínimo no intervalo } [-2, 2].$$