ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Grupo I

1.

É imediato verificar que B não contem o polinómio nulo, e portanto não pode ser um subespaço espaço vetorial. A, C e D são subespaços vetoriais.
A resposta certa é **a)**.

2.

Calculando AB e BA concluimos que a resposta certa é **c)**.

3.

Como as matrizes são 3×3 então tem-se $\det -M = -\det M$ e portanto a resposta certa é **b)**.

4.

Como as matrizes são 2×2 então tem-se $\det -M = \det M$ e portanto a resposta certa é **c)**.

Grupo II

Uma vez que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & n & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & n+2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

o determinante é igual a $7(n+2)-5 = 7n+9$ que é diferente de zero para qualquer número de estudante da Universidade Aberta, e portanto a solução será única.
Sendo portanto um sistema de Cramer o valor de y é dado por

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & n & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{7n+9}.$$

Grupo III

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2-\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix},$$

onde dividimos a segunda linha do determinante por $b-a$ e dividimos a terceira linha do determinante por $c-a$, e usamos o facto de $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$ e $c^2-a^2=(c-a)(c+a)$.

Tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_3-\ell_2]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{vmatrix} = (c-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (c-b),$$

e portanto

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b)

Para o determinante 4×4 procedemos exatamente da mesma forma,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2-\ell_1 \\ \ell_3-\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1}]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix}.$$

Tal como anteriormente vamos agora dividir a segunda linha do determinante por $b-a$, dividimos a terceira linha do determinante por $c-a$ e dividimos a quarta linha do determinante por $d-a$. Usamos também e usamos o facto de $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$, $c^2-a^2=(c-a)(c+a)$ e $d^2-a^2=(d-a)(d+a)$. Usando a sugestão para fatorizar os termos cúbicos podemos escrever

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 0 & 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix}.$$

Tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 0 & 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_3-\ell_2 \\ \ell_4-\ell 2}]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & (c-b)(a+b+c) \\ 0 & 0 & d-b & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix},$$

usando o facto de

$$c^2+ac-b^2-ab=(c-b)(a+b+c)$$

e

$$d^2+ad-b^2-ab=(d-b)(a+b+d).$$

Dividindo a terceira linha por $c-b$ e a quarta linha por $d-b$ obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & (c-b)(a+b+c) \\ 0 & 0 & d-b & (d-b)(a+b+d) \end{vmatrix} = (c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & a+b+d \end{vmatrix},$$

e finalmente

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & a+b+d \end{vmatrix} \xrightarrow[\ell_4-\ell_3]{} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = (d-c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Juntando os termos todos obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Grupo IV

a)

Uma vez que temos 3 incógnitas, para termos uma solução única é condição necessária e suficiente que a característica da matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & a \\ a & b & 4 \end{pmatrix}$ seja igual a 3, ou o que é equivalente que o determinante de A seja não nulo. Tem-se

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & b \\ 0 & b & a & 1 \\ a & b & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_3-\ell_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & b \\ 0 & b & a & 1 \\ 0 & b & 3 & 3-b \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_3-\ell_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & b \\ 0 & b & a & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 2-b \end{array}\right),$$

donde concluimos que $\det A = ab(3-a)$ e portanto

$$\det A \neq 0 \iff a\neq 0 \text{ e } a\neq 3 \text{ e } b\neq 0.$$

Portanto se $a \neq 0$ e $a \neq 3$ e $b \neq 0$ a solução é única e resolvendo primeiro em ordem a z, depois a ordem a y e a x obtemos a solução

$$(x,y,z) = \left(\frac{4b-ab-2}{a(3-a)}, \frac{3-3a+ab}{b(3-a)}, \frac{2-b}{3-a}\right).$$

b) e c)

Para o sistema ser indeterminado é necessário que r$(A) = r([A|B]) < 3$ onde $[A|B]$ é a matriz aumentada do sistema.

Pelo que foi visto na alínea anterior já sabemos que a característica de A é diferente de 3 se $a=0$ ou $a=3$ ou $b=0$.

Vejamos separadamente cada um destes casos.

- $a=0$

Neste caso a matriz aumentada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2-b \end{array}\right) \xrightarrow[\ell_3-3\ell_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-4b \end{array}\right)$,

e portanto se $2-4b \neq 0$ o sistema é impossível, e se $2-4b=0$, ou seja se $b=1/2$, então a solução é $(x,2,1/2), \forall x \in \mathbb{R}$.

- $a=3$

Neste caso a matriz aumentada é $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & b \\ 0 & b & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-b \end{array}\right)$ e portanto se $2-b \neq 0$ o sistema é impossível, e se $2-b=0$, ou seja se $b=2$, então a solução é $\left(\frac{2-z}{3}, \frac{1-3z}{2}, z\right), \forall z \in \mathbb{R}$.

- $b=0$

Se $a=0$ ou se $a=3$ já vimos que o sistema é impossível. Se $a \neq 0$ e se $a \neq 3$ então a matriz aumentada é

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 3-a & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\frac{1}{a}\ell_2 \\ \ell_3-(3-a)\ell_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 2-\frac{3-a}{a} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3(a-1)}{a} \end{array}\right),$$

e portanto se $3(a-1)/a \neq 0$, oiu seja se $a \neq 1$ o sistema é impossível, e se $a=1$ a solução é $(-1,y,1), \forall y \in \mathbb{R}$.

Grupo V

Sendo $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, então $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix}$, e portanto

$$M^2 = I_2 \iff \begin{pmatrix} a^2+bc & ab \\ ac & bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab=0 \\ ac=0 \\ bc=1. \end{cases}$$

Começando pela última das 4 equações, podemos concluir que tanto b como c são diferentes de zero pois $bc = 1$, e portanto podemos escrever c como $c = \frac{1}{b}$.
Uma vez que $b \neq 0 \neq c$ a única forma de se verificarem as equações $ab = 0$ e $ac = 0$ é se $a = 0$, e nesse caso a primeira equação reduz-se a $bc = 1$ que é exatamente a quarta equação.
Concluimos portanto que as matrizes M que satisfazem $M^2 = I_2$ são as matrizes da forma

$$M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$