Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária do e-fólio global de 22 de junho de 2023

1. Temos $70 = 100 - 30$ cães a gostar ou da ração *cachorro feliz* (A) ou da ração *papinha boa* (B). Como

$$\overbrace{\#(A \cup B)}^{70} = \overbrace{\#A}^{43} + \overbrace{\#B}^{52} - \#(A \cap B),$$

temos $\#(A \cap B) = 95 - 70 = 25$. Logo **A)** é a opção verdadeira.

2. Consideremos $a = 5$, $b = k = 2$ e $n = 6$. Temos $ka \equiv kb \pmod{n}$ i.e. $10 \equiv 4 \pmod{6}$ e $a \not\equiv b \pmod{n}$ i.e. $5 \not\equiv 2 \pmod{6}$ logo (1) é satisfazível sendo **A)** falsa e **C)** falsa. Consideremos $a = 2$, $b = 1$, $k = 3$ e $n = 7$. Temos $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ i.e. $8 \equiv 1 \pmod{7}$ e $a \not\equiv b \pmod{n}$ i.e. $2 \not\equiv 1 \pmod{7}$ logo (2) é satisfazível sendo **B)** falsa. Logo **D)** é a opção verdadeira.

3. O polinómio característico é dado por

$$P(t) = t^2 + 4t + 3 = (t+3)(t+1).$$

Logo

$$x_n = a(-1)^n + b(-3)^n.$$

Agora temos $0 = x_0 = a(-1)^0 + b(-3)^0 = a + b$ e $2 = x_1 = a(-1)^1 + b(-3)^1 = -a - 3b$. Donde $2 = b - 3b = -2b$ e $b = -1$ e $a = 1$. Logo a opção verdadeira é a opção **C)**.

4. Queremos mostrar que, para $n \geq 1$, temos:

$$\sum_{k=0}^{n} (n-k) \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}^2 &= \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{k}\binom{n}{k} \\
&\overset{\text{Simetria}}{=} \sum_{k=0}^{n}(n-k)\binom{n}{n-k}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{n-k}\binom{n}{k} + (0)\binom{n}{0}\binom{n}{n} \\
&\overset{\text{Extração}}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\cancel{(n-k)}\frac{n}{\cancel{n-k}}\binom{n-1}{n-k-1}\binom{n}{k} \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{n-1-k}\binom{n}{k} \\
&\overset{\text{Vandermonde}}{=} = n\binom{2n-1}{n-1} \\
&\overset{\text{Simetria}}{=} n\binom{2n-1}{2n-1-(n-1)} \\
&= n\binom{2n-1}{n}.
\end{aligned}
$$

5. Como $81 - 13 = 4 \times 17$ começamos por notar que

$$3^4 = 81 \equiv 13 \pmod{17},$$

elevando ao quadrado e pela compatibilidade com o produto teremos

$$(3^4)^2 = 3^8 \equiv 13^2 \pmod{17}.$$

Como $13^2 - 16 = 169 - 16 = 9 \times 17$ temos

$$3^8 \equiv 16 \pmod{17}.$$

Mas claramente

$$16 \equiv -1 \pmod{17},$$

logo

$$(3^8)^8 \equiv (-1)^8 \pmod{17}.$$

Concluímos que

$$3^{64} \equiv 1 \pmod{17},$$

logo o resto da divisão de 3^{64} por 17 é 1.

6. Temos mdc$(F_1, F_2) = $ mdc$(1, 1) = 1$ logo F_1 e F_2 são primos entre si. Vamos considerar que mdc$(F_n, F_{n+1}) = 1$ e vamos mostrar que mdc$(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$.

$$\begin{aligned}
\text{mdc}(F_{n+1}, F_{n+2}) &= \text{mdc}(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n) \\
&\overset{\text{Sugestão } k=1}{=} \text{mdc}(F_{n+1}, F_{n+1} + F_n - kF_{n+1}) \\
&= \text{mdc}(F_{n+1}, F_n) = 1.
\end{aligned}$$

FIM