Introdução

Objetivo

- Estudo de métodos de contagem
- Verificar as possibilidades de agrupamento dos elementos de um conjunto

Introdução

Bin	Dec
00000000	0
00000001	1
00000010	2
00000011	3
00000100	4
.	
.	
.	
11111110	254
11111111	255

Figura: Valores possíveis de um byte.

Princípio Fundamental da Contagem

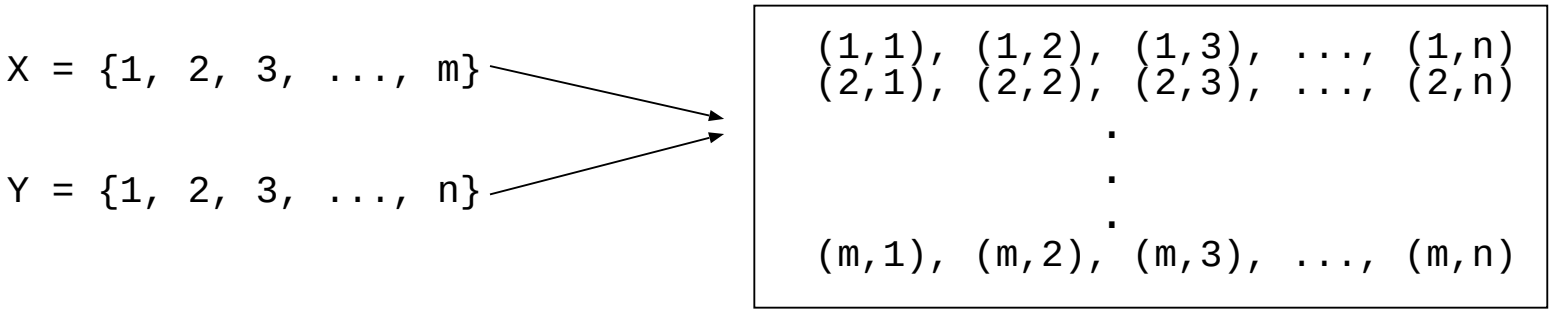

Figura: Princípio fundamental da contagem.

Princípio Fundamental da Contagem

X = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Y = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(1,1),	(1,2),	(1,3),	(1,4),	(1,5),	(1,6)
(2,1),	(2,2),	(2,3),	(2,4),	(2,5),	(2,6)
(3,1),	(3,2),	(3,3),	(3,4),	(3,5),	(3,6)
(4,1),	(4,2),	(4,3),	(4,4),	(4,5),	(4,6)
(5,1),	(5,2),	(5,3),	(5,4),	(5,5),	(5,6)
(6,1),	(6,2),	(6,3),	(6,4),	(6,5),	(6,6)

Figura: Resultados do lançamento de dois dados.

Arranjo

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, onde $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \ldots \neq x_n$. Um subconjunto de k elementos distintos de X é chamado de arranjo, onde $1 \leq k \leq n$. O número de arranjos possíveis de X com k elementos é dado por

$$A_{n,k} = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(k-1))}_{k \text{ fatores}}.$$

Arranjo com Repetição

Suponha um subconjunto de elementos de X, onde estes elementos podem ser repetidos. O número possível de arranjos com repetição de X com k elementos é

$$AR_{n,k} = \underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{k \text{ fatores}} = n^k.$$

Permutações

Para $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, chamamos de permutação de X a todo arranjo em que $k = n$. O número de permutações de X é

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$$

Permutações Circulares

O número de permutações circulares do conjunto X com n elementos é dado por

$$PC_n = (n-1)!$$

Permutações com Elementos Repetidos

Considere que podem existir elementos repetidos no conjunto X. Neste caso, o número de permutações possíveis de n elementos é dado por

$$PR_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots,k_m!},$$

onde m é o número de elementos não repetidos de X e k_i é o número de ocorrências do i-ésimo elemento não repetido de X.

Combinações

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, chamamos de combinação de X a todo subconjunto com k elementos onde a ordem em que estes elementos aparecem não influencia o resultado do experimento. O número de combinações possíveis de X para $n > 0$ e $0 \leq k \leq n$ corresponde a

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Coeficientes Binomiais

Teorema de Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k.$

Ex: $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$

Coeficientes Binomiais

$$\begin{array}{cccc} \binom{0}{0} & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Figura: Triângulo aritmético de Pascal.

Coeficientes Multinomiais

De quantas maneiras podemos colocar 12 pessoas em três salas de forma que na primeira sala fiquem 5 pessoas, na segunda sala fiquem 4 pessoas e na terceira sala fiquem 3 pessoas?

$$N = \binom{12}{5}\binom{7}{4}\binom{3}{3} = \frac{12!}{5!7!}\frac{7!}{4!3!}\frac{3!}{3!0!} = \frac{12!}{5!4!3!} = \binom{12}{5,4,3}.$$

Coeficientes Multinomiais

De quantas maneiras podemos colocar 12 pessoas nas salas A (com ar-condicionado), B (com ventilador) e C (sem nenhum tipo de refrigeração), tendo cada grupo 4 pessoas?

$$N = \binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4} = \frac{12!}{4!8!}\frac{8!}{4!4!}\frac{4!}{4!0!} = \frac{12!}{4!4!4!} = \binom{12}{4,4,4}.$$

Coeficientes Multinomiais

Suponha que $A = \{a, b, c, d\}$ seja particionado em dois subconjuntos de dois elementos cada. As possíveis combinações para a divisão de A são:

- $A_1 = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$
- $A_2 = \{\{c, d\}, \{a, b\}\}$
- $A_3 = \{\{a, c\}, \{b, d\}\}$
- $A_4 = \{\{b, d\}, \{a, c\}\}$
- $A_5 = \{\{a, d\}, \{b, c\}\}$
- $A_6 = \{\{b, c\}, \{a, d\}\}$

$$N = \frac{1}{2!}\binom{4}{2, 2} = 3.$$

Coeficientes Multinomiais

Considere o particionamento de um conjunto em r distintos subconjuntos com $n_1, \ldots, n_k$ elementos, onde $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_k : \\ n_1 + \ldots n_k = n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Coeficientes Multinomiais

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(x+y+z)^3 = \quad & \frac{3!}{3!0!0!}x^3y^0z^0 + \frac{3!}{2!1!0!}x^2y^1z^0 + \\
& \frac{3!}{2!0!1!}x^2y^0z^1 + \frac{3!}{1!2!0!}x^1y^2z^0 + \\
& \frac{3!}{1!1!1!}x^1y^1z^1 + \frac{3!}{1!0!2!}x^1y^0z^2 + \\
& \frac{3!}{0!2!1!}x^0y^2z^1 + \frac{3!}{0!1!2!}x^0y^1z^2 + \\
& \frac{3!}{0!3!0!}x^0y^3z^0 + \frac{3!}{0!0!3!}x^0y^0z^3.
\end{aligned}
$$