U.C. 21175

Análise Infinitesimal - proposta de resolução

12 de fevereiro de 2019

1. Calcule os seguintes limites:

   (a)
$$\lim_{x\to -2} \frac{e^{2x}\left(x^2-x-6\right)\cos(x)}{x+2}$$

   Uma vez que as funções que aparecem no numerador e denominador são ambas contínuas no ponto $x=-2$, os respectivos limites, quando x tender para -2, são iguais às suas imagens no ponto -2 e verificamos imediatamente por substituição de x por -2, que temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos factorizar o polinómio que aparece no numerador,

$$(x^2-x-6)=(x+2)(x-3),$$

   pelo que

$$\lim_{x\to -2} \frac{e^{2x}\left(x^2-x-6\right)\cos(x)}{x+2} = \lim_{x\to -2} \frac{e^{2x}(x+2)(x-3)\cos(x)}{x+2} =$$
$$\lim_{x\to -2} e^{2x}(x-3)\cos(x) = -5e^{-4}\cos(-2).$$

   (b)
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+e^{-2x}}{x^2+x-3}.$$

   Temos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+e^{-2x}}{x^2+x-3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{e^{-2x}}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3+\frac{1}{e^{2x}x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}.$$

   Agora notamos que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{e também} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{x^2} = 0.$$

   Por outro lado, como

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{e também} \quad \lim_{x\to +\infty} e^{2x} = +\infty,$$

   temos

$$\lim_{x\to +\infty} \left(e^{2x}x^2\right) = +\infty \quad \text{pelo que} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{2x}x^2} = 0.$$

   Assim,

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3+\frac{1}{e^{2x}x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}} = \frac{3+0}{1+0-0} = 3.$$

2. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}\sin(2x)}{7x} & x \neq 0 \\ \\ 5 & x = 0 \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de f.

Para $x \neq 0$, temos que a função e^{-x} é contínua, pois resulta da composição de duas funções contínuas (a função exponencial e o polinómio $-x$). A função $\sin(2x)$ é contínua, pois resulta da composição de duas funções contínuas (a função seno e o polinómio $(2x)$). O denominador $(7x)$, sendo uma função polinomial também é contínua. Assim, o numerador $e^{-x}\sin(2x)$ é uma função contínua, pois é o produto de duas funções contínuas e, portanto $f(x)$ é uma função contínua, por resultar da divisão de duas funções contínuas, sendo que o denominador nunca se anula, para $x \neq 0$.

Para estudar a continuidade de f no ponto $x = 0$, podemos por exemplo calcular o limite lateral

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}\sin(2x)}{7x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{-x}}{7}\frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{2e^0}{7} = \frac{2}{7},$$

pois

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 1 \neq 5 = f(0),$$

concluímos que f não é contínua no ponto $x = 0$. Concluímos, portanto, que f é contínua para $x < 0$ e também para $x > 0$, sendo descontínua no ponto $x = 0$.

(b) Prove que a função f não é diferenciável no ponto $x = 0$.

Pela alínea anterior, a função f não é contínua no ponto $x = 0$. Portanto f não é diferenciável em $x = 0$.

3. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f(b) = f(a)$. Considere a função

$$g : [a, b] \to \mathbb{R}$$

definida por

$$g(x) = (f(x))^2 .$$

(a) Prove que a função g é diferenciável no intervalo $]a, b[$.

Por hipótese, a função f é diferenciável no intervalo $]a, b[$. A função g é definida como a composição da função f com a função x^2, que sendo polinomial é diferenciável. Então a função g é diferenciável pois é a composição de funções diferenciáveis no intervalo $]a, b[$.

(b) Prove que a derivada de g tem pelo menos uma raíz no intervalo $]a, b[$.

Como $f(b) = f(a)$, então temos $g(b) = (f(b))^2 = (f(a))^2 = g(a)$. Pela alínea anterior sabemos que g é diferenciável no intervalo $]a, b[$. Portanto, pelo teorema de Rolle, concluímos que existe $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$, ou seja, g tem pelo menos uma raíz no intervalo $]a, b[$.

4. Determine a família de primitivas das seguintes funções reais de variável real:

   (a) $\frac{\cos(2x)}{7} - x + e^{-2x}$

   Temos

$$\int \left(\frac{\cos(2x)}{7} - x + e^{-2x}\right) dx = \int \left(\frac{\cos(2x)}{7}\right) dx + \int (-x)\, dx + \int \left(e^{-2x}\right) dx =$$

$$\frac{\sin(2x)}{14} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

   (b) $x^2 \cos(4x)$

   Fazendo integração por partes temos

$$\int \left(x^2 \cos(4x)\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \int \left(\frac{\sin(4x)}{4}2x\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \int \left(\frac{\sin(4x)}{2}x\right) dx.$$

   Fazendo novamente integração por partes, temos

$$\int \left(\frac{\sin(4x)}{2}x\right) dx = -\frac{\cos(4x)}{8}x - \int \left(-\frac{\cos(4x)}{8}\right) dx = -\frac{\cos(4x)}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32}.$$

   Assim,

$$\int \left(x^2 \cos(4x)\right) dx = \frac{\sin(4x)}{4}x^2 - \left(-\frac{\cos(4x)}{8}x + \frac{\sin(4x)}{32}\right) =$$

$$\frac{\sin(4x)}{4}x^2 + \frac{\cos(4x)}{8}x - \frac{\sin(4x)}{32} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

5. Calcule a área do conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cujas coordenadas satisfazem as seguintes condições

$$1 \leq x \leq 3, \qquad 0 \leq y \leq \cos(3x) + 2(e^{-x} + x).$$

   A área pretendida é dada por

$$\int_1^3 \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx.$$

   Calculemos uma primitiva da função integranda

$$F(x) := \int \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx = \frac{\sin(3x)}{3} - 2e^{-x} + x^2.$$

   Pelo teorema fundamental do cálculo temos que

$$\int_1^3 \left(\cos(3x) + 2(e^{-x} + x)\right) dx = F(3) - F(1) = \frac{\sin(9)}{3} - 2e^{-3} + 9 - \left(\frac{\sin(3)}{3} - 2e^{-1} + 1\right) =$$

$$\frac{\sin(9) - \sin(3)}{3} - 2e^{-3} + 2e^{-1} + 8.$$