

Proposta de resolução do E-fólio B

Questão 1

Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

1.1 Determine o núcleo de f .

Provar a linearidade da aplicação f

Para se poder falar do núcleo de f , primeiro é necessário mostrar que a referida aplicação é linear, isto é, que:

$$f(u + v) = f(u) + f(v) \quad \text{e} \quad f(\alpha u) = \alpha f(u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (x', y', z')$ dois vetores arbitrários de $\mathbb{R}^3$, tem-se: $u + v = (x + x', y + y', z + z')$. Aplicando f , obtém-se:

$$\begin{aligned} f(u + v) &= f(x + x', y + y', z + z') \\ &= ((x + x') - (y + y'), (y + y') - (z + z'), (z + z') - (x + x')) \\ &= (x - y + x' - y', y - z + y' - z', z - x + z' - x') \\ &= (x - y, y - z, z - x) + (x' - y', y' - z', z' - x') \\ &= f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= f(u) + f(v). \end{aligned}$$

Considerando agora $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\alpha u = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Aplicando f , obtém-se:

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x - \alpha y, \alpha y - \alpha z, \alpha z - \alpha x) \\ &= \alpha(x - y, y - z, z - x) = \alpha f(u). \end{aligned}$$

Como ambas as condições são satisfeitas, conclui-se que a aplicação f é linear.

Determinar o núcleo de f

O núcleo de f é definido por:

$$\text{Nuc } f = \{ u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \}.$$

Assim, para determinar o núcleo de f , é necessário resolver a equação:

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Considerando $u = (x, y, z)$, tem-se:

$$f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \iff f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff (x - y, y - z, z - x) = (0, 0, 0).$$

Esta condição conduz ao seguinte sistema de equações lineares homogêneo:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \\ z - x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \\ x = z \end{cases}$$

A solução geral deste sistema é $x = y = z$. Assim, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, os vetores do núcleo são da forma:

$$u = (t, t, t) = t(1, 1, 1).$$

Conclui-se, portanto, que

$$\text{Nuc } f = \{ t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R} \} = \langle (1, 1, 1) \rangle.$$

1.2 Averigue se f é injetiva e/ou sobrejetiva.

Injetividade

Uma aplicação linear f é injetiva se, e só se, o seu núcleo é constituído apenas pelo vetor nulo, isto é, se, e só se,

$$\text{Nuc}(f) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Como determinámos na alínea anterior que $\text{Nuc}(f) = \langle (1, 1, 1) \rangle \neq \{(0, 0, 0)\}$, conclui-se que f **não é injetiva**.

Sobrejetividade

Uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é sobrejetiva se, e só se, a sua imagem coincide com o conjunto (espaço) de chegada, isto é, se, e só se, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$.

Pelo Teorema da Dimensão, tem-se:

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Nuc}(f)) + \dim(\text{Im}(f)).$$

De acordo com o resultado obtido na alínea anterior, sabemos que

$$\dim(\text{Nuc}(f)) = 1 \text{ (e que } \dim(\mathbb{R}^3) = 3)$$

assim, substituindo estes valores na expressão anterior, obtém-se:

$$3 = 1 + \dim(\text{Im}(f)) \iff \dim(\text{Im}(f)) = 2.$$

Como $\dim(\text{Im}(f)) = 2 \neq 3$, a imagem de f é um subespaço próprio de $\mathbb{R}^3$, isto é, $\text{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$. Logo, conclui-se que f **não é sobrejetiva**.

Questão 2

Seja f uma aplicação linear, tal que $f(1, 2, 3) = (1, 2, 3, 4)$, $f(2, 2, 5) = (2, 3, 4, 5)$ e $f(3, 5, 8) = (3, 4, 5, 6)$.

2.1 Determine a matriz de f em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Pretende-se determinar a matriz que representa a aplicação linear f em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, isto é, $M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4))$ onde

$$B_c(\mathbb{R}^3) = (e_1, e_2, e_3) = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) \text{ e}$$

$$B_c(\mathbb{R}^4) = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

representam as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, respectivamente.

Provar que os vetores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 2, 5)$, $v_3 = (3, 5, 8)$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$

Para que a sequência (v_1, v_2, v_3) seja uma base de $\mathbb{R}^3$, os vetores devem ser linearmente independentes. Verificamos esta condição calculando o determinante da matriz formada por estes vetores (dispostos em colunas):

$$\det(M_B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Calculando o determinante (utilizando, por exemplo, a regra de Sarrus ou a expansão de Laplace na primeira linha), vem:

$$\begin{aligned} \det(M_B) &= 1(2 \cdot 8 - 5 \cdot 5) - 2(2 \cdot 8 - 5 \cdot 3) + 3(2 \cdot 5 - 2 \cdot 3) \\ &= 1(16 - 25) - 2(16 - 15) + 3(10 - 6) \\ &= 1(-9) - 2(1) + 3(4) = -9 - 2 + 12 = 1 \end{aligned}$$

Como $\det(M_B) = 1 \neq 0$, os vetores são linearmente independentes e, sendo três vetores em $\mathbb{R}^3$, formam uma base B de $\mathbb{R}^3$.

Nota: Para demonstrar que os referidos vetores v_1, v_2, v_3 são linearmente independentes, poderíamos ter resolvido a seguinte equação vetorial:

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0, 0, 0)$$

De facto, substituindo pelos vetores dados, obtemos:

$$\alpha(1, 2, 3) + \beta(2, 2, 5) + \gamma(3, 5, 8) = (0, 0, 0)$$

o que origina o seguinte sistema linear homogéneo, que pode ser resolvido utilizando o método de eliminação de Gauss (na forma matricial):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Para facilitar, trocamos a linha 2 com a linha 3 ($L_2 \leftrightarrow L_3$) e multiplicamos por -1 :

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

O sistema encontra-se em forma de escada. Resolvendo-o:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2(0) + 0 = 0 \\ \beta + 0 = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Como a única solução é a trivial ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), os vetores são linearmente independentes.

Definição das Matrizes Componentes

Para determinar a matriz pretendida, utilizamos o produto:

$$\begin{aligned} M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) &= \\ &= M(id_{\mathbb{R}^4}; B_c(\mathbb{R}^4), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c(\mathbb{R}^3), B) \end{aligned}$$

Cálculo da matriz $M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4))$

Como

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1, 2, 3) = (1, 2, 3, 4) = 1e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + 4e'_4 \\ f(v_2) &= f(2, 2, 5) = (2, 3, 4, 5) = 2e'_1 + 3e'_2 + 4e'_3 + 5e'_4 \\ f(v_3) &= f(3, 5, 8) = (3, 4, 5, 6) = 3e'_1 + 4e'_2 + 5e'_3 + 6e'_4 \end{aligned}$$

então

$$M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4)) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz $M(id_{\mathbb{R}^4}; B_c(\mathbb{R}^4), B_c(\mathbb{R}^4))$

Como

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^4}(e'_1) &= e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 + 0e'_4 \\ id_{\mathbb{R}^4}(e'_2) &= e'_2 = 0e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3 + 0e'_4 \\ id_{\mathbb{R}^4}(e'_3) &= e'_3 = 0e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3 + 0e'_4 \\ id_{\mathbb{R}^4}(e'_4) &= e'_4 = 0e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3 + 1e'_4 \end{aligned}$$

então

$$M(id_{\mathbb{R}^4}; B_c(\mathbb{R}^4), B_c(\mathbb{R}^4)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz $M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c(\mathbb{R}^3), B)$

Temos:

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}^3}(e_1) &= e_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \\ id_{\mathbb{R}^3}(e_2) &= e_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 \\ id_{\mathbb{R}^3}(e_3) &= e_3 = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 \end{aligned}$$

Resolvendo cada uma das equações matriciais, temos para a **primeira equação**:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = (1, 0, 0)$$

Esta equação é equivalente ao sistema linear matricial que resolvemos utilizando o método de condensação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right]$$

Para facilitar, trocamos a linha 2 com a linha 3 e multiplicamos por -1 :

$$\xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

O sistema encontra-se em forma de escada. Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 1 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 3 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3(4) = 1 \\ \alpha_2 + 4 = 3 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2(-1) + 12 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -9 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a primeira coluna da matriz é $(-9, -1, 4)^T$.

Resolvendo a **segunda equação**:

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 = (0, 1, 0)$$

obtém-se a matriz ampliada e o processo de condensação de Gauss dados por:

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 + 3(1) = 0 \\ \beta_2 + 1 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2(-1) + 3 = 0 \\ \beta_2 = -1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -1 \\ \beta_2 = -1 \\ \beta_3 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a segunda coluna da matriz é $(-1, -1, 1)^T$.

Resolvendo a **terceira equação**:

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \gamma_3 v_3 = (0, 0, 1)$$

obtem-se a matriz ampliada e o processo de condensação de Gauss dados por:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[L_2 \leftarrow -L_2]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 0 \\ \gamma_2 + \gamma_3 = -1 \\ \gamma_3 = -2 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_2 + 3(-2) = 0 \\ \gamma_2 - 2 = -1 \\ \gamma_3 = -2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 + 2(1) - 6 = 0 \\ \gamma_2 = 1 \\ \gamma_3 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 4 \\ \gamma_2 = 1 \\ \gamma_3 = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a terceira coluna da matriz é $(4, 1, -2)^T$.

Assim, construindo a matriz com as colunas calculadas:

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c(\mathbb{R}^3), B) = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Cálculo do Produto Matricial

Começamos por escrever a expressão:

$$\begin{aligned} M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) &= \\ &= M(id_{\mathbb{R}^4}; B_c(\mathbb{R}^4), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot M(id_{\mathbb{R}^3}; B_c(\mathbb{R}^3), B) \end{aligned}$$

Substituindo pelas matrizes obtidas, obtemos:

$$M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Efetuando a multiplicação das duas primeiras matrizes (associatividade):

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} -9 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Efetuando a multiplicação final passo a passo:

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1(-9) + 2(-1) + 3(4) & 1(-1) + 2(-1) + 3(1) & 1(4) + 2(1) + 3(-2) \\ 2(-9) + 3(-1) + 4(4) & 2(-1) + 3(-1) + 4(1) & 2(4) + 3(1) + 4(-2) \\ 3(-9) + 4(-1) + 5(4) & 3(-1) + 4(-1) + 5(1) & 3(4) + 4(1) + 5(-2) \\ 4(-9) + 5(-1) + 6(4) & 4(-1) + 5(-1) + 6(1) & 4(4) + 5(1) + 6(-2) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -9 - 2 + 12 & -1 - 2 + 3 & 4 + 2 - 6 \\ -18 - 3 + 16 & -2 - 3 + 4 & 8 + 3 - 8 \\ -27 - 4 + 20 & -3 - 4 + 5 & 12 + 4 - 10 \\ -36 - 5 + 24 & -4 - 5 + 6 & 16 + 5 - 12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ -11 & -2 & 6 \\ -17 & -3 & 9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Resultado Final

A matriz da aplicação f nas bases canônicas é:

$$M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ -11 & -2 & 6 \\ -17 & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Nota: Como

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\
 v_2 &= 2e_1 + 2e_2 + 5e_3 \\
 v_3 &= 3e_1 + 5e_2 + 8e_3
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}f(v_1) &= 1e'_1 + 2e'_2 + 3e'_3 + 4e'_4 \\f(v_2) &= 2e'_1 + 3e'_2 + 4e'_3 + 5e'_4 \\f(v_3) &= 3e'_1 + 4e'_2 + 5e'_3 + 6e'_4\end{aligned}$$

então

$$f(v) = M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot v^T, \quad \forall v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Assim, determinar $M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4))$ é equivalente a resolver a equação matricial:

$$M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot V = M(id_{\mathbb{R}^4}; B_c(\mathbb{R}^4), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot V = M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4))$$

desde que $B = (v_1, v_2, v_3)$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$ e onde:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) = M(f; B, B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot V^{-1}$$

OBS.: Já vimos que $|V| \neq 0$, logo V é invertível, portanto existe V^{-1} .

A inversa de V pode ser calculada através do processo de condensação (eliminação) de Gauss. De facto, $[V|I_3]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Para obter um pivô unitário, podemos trocar $L_2 \leftrightarrow L_3$ e multiplicar por -1 :

$$\xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -L_2}]{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Agora efetuamos a substituição para cima (condensação para a forma de escada reduzida):

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -11 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Logo,

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2 Determine $f(x, y, z)$ para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Uma vez determinada a matriz que representa a aplicação linear f nas bases canônicas, podemos obter a expressão analítica de $f(x, y, z)$ através do produto matricial da matriz obtida na alínea anterior pelo vetor coluna das coordenadas (x, y, z) .

Temos que:

$$[f(x, y, z)]_{B_c(\mathbb{R}^4)} = M(f; B_c(\mathbb{R}^3), B_c(\mathbb{R}^4)) \cdot [(x, y, z)]_{B_c(\mathbb{R}^3)}^T$$

Efetando o cálculo:

$$\begin{aligned} [f(x, y, z)]_{B_c(\mathbb{R}^4)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 3 \\ -11 & -2 & 6 \\ -17 & -3 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(x) + 0(y) + 0(z) \\ -5(x) - 1(y) + 3(z) \\ -11(x) - 2(y) + 6(z) \\ -17(x) - 3(y) + 9(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x \\ -5x - y + 3z \\ -11x - 2y + 6z \\ -17x - 3y + 9z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a expressão analítica da aplicação linear é:

$$f(x, y, z) = (x, -5x - y + 3z, -11x - 2y + 6z, -17x - 3y + 9z), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Nota: Existem outros processos de resolução mas, a proposta de resolução acima apresentada é a mais simples e mais rápida, caso o(a) estudante tenha resolvido a questão 2.1.

Questão 3

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.1. Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

Os valores próprios da matriz A correspondem aos zeros do polinómio característico de A , definido por:

$$p_A(x) = \det(A - xI_3).$$

Por um lado,

$$A - xI_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 2 & 0 \\ 1 & -1-x & -3 \\ 0 & 1 & 1-x \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, a aplicação do Teorema de Laplace à primeira linha de $A - xI_3$ resulta em:

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= (-1)^{1+1}(1-x) \det \begin{bmatrix} -1-x & -3 \\ 1 & 1-x \end{bmatrix} + \\ &\quad + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1-x \end{bmatrix} + \\ &\quad + (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1-x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (1-x)((-1-x)(1-x) - (-3) \cdot 1) - \\ &\quad - 2(1 \cdot (1-x) - (-3) \cdot 0) + 0 \\ &= (1-x)(x^2 - 1 + 3) - 2(1-x) \\ &= (1-x)(x^2 + 2 - 2) = (1-x)x^2 = -x^2(x-1). \end{aligned}$$

Logo, os valores próprios de A são as soluções da equação:

$$p_A(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0 \vee x = 1.$$

Assim, conclui-se que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ são os valores próprios da matriz A . De acordo com o resultado obtido na alínea anterior, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidade algébrica 2 e 1, respectivamente.

3.2. Determine a multiplicidade geométrica de cada valor próprio de A .

De acordo com o resultado obtido na alínea anterior, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ são os valores próprios de A com multiplicidade algébrica 2 e 1, respectivamente. Dado um valor próprio λ de uma matriz A de tipo $n \times n$, a multiplicidade geométrica de λ corresponde à dimensão do subespaço próprio de A associado ao valor próprio λ , ou seja, à dimensão do espaço vectorial:

$$M_\lambda = \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \lambda X\} = \{X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \lambda I_n)X = 0\}.$$

Logo, como $\lambda_1 = 0$, o subespaço próprio de A associado a λ_1 corresponde ao espaço $M_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\}$ e portanto ao espaço nulo da matriz A . Pelo método de Gauss-Jordan,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_3 + \frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \end{cases}. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que

$$\begin{aligned} M_0 &= \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2z, y = -z\} \\ &= \{(2z, -z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \{z(2, -1, 1) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} = \langle (2, -1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Como o vetor $(2, -1, 1)$ é não nulo, a sequência $((2, -1, 1))$ é linearmente independente e gera M_0 e logo constitui uma base de M_0 . Deduz-se portanto que M_0 tem dimensão igual a 1 e logo a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 0$ é igual a 1.

Para o valor próprio $\lambda_2 = 1$ de A , sabe-se que a multiplicidade geométrica de λ_2 , denotada por $\text{m.g.}(\lambda_2)$, satisfaz $1 \leq \text{m.g.}(\lambda_2) \leq \text{m.a.}(\lambda_2)$, onde $\text{m.a.}(\lambda_2)$ representa a multiplicidade algébrica de λ_2 . Ora, pela alínea anterior, sabe-se que $\text{m.a.}(\lambda_2) = \text{m.a.}(1) = 1$. Logo, $1 \leq \text{m.g.}(\lambda_2) \leq \text{m.a.}(\lambda_2) = 1$ e portanto $\text{m.g.}(\lambda_2) = 1$.

Em conclusão, os valores próprios $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ de A têm ambos multiplicidade geométrica igual a 1.

Questão 4

Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão finita, $f : E \rightarrow F$ uma aplicação linear e $v_1, \dots, v_k \in E$. Mostre que, se $(f(v_1), \dots, f(v_k))$ é linearmente independente, então $(v_1, \dots, v_k)$ é linearmente independente.

Suponhamos que E e F são espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e que $(f(v_1), \dots, f(v_k))$ é uma família de vetores linearmente independentes em F . Nestas condições, pretende-se provar que $(v_1, \dots, v_k)$ é uma sequência de vetores linearmente independentes em E , isto é, que a única solução da equação:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_E,$$

é $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$ ($\alpha_i \in \mathbb{K}$).

Aplicando f a ambos os membros da equação anterior, obtém-se:

$$f(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) = f(0_E).$$

Tendo em conta que f é uma aplicação linear, tem-se:

$$\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_k f(v_k) = 0_F.$$

Como, por hipótese, $(f(v_1), \dots, f(v_k))$ é uma família de vetores linearmente independentes em F , a única combinação linear nula destes vetores é aquela em que todos os coeficientes são nulos. Logo:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_k = 0.$$

Assim, conclui-se que $(v_1, \dots, v_k)$ é uma família de vetores linearmente independentes em E .

Questão 5

Sejam A e B matrizes de tipo $n \times n$ tais que existe uma base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios comuns a ambas as matrizes. Mostre que $AB = BA$.

Uma vez que existe uma base $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formada por vetores próprios comuns a A e a B , trata-se de matrizes pertencentes a $\mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Além disso, como $v_1, \dots, v_n$ são vetores próprios comuns a A e a B , tem-se que

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad Bv_i = \mu_i v_i, \quad \text{com } \lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$$

em que os λ_i, μ_i são os valores próprios associados a v_i para as matrizes A, B respetivamente. Uma maneira de aferir que duas matrizes são iguais consiste em vê-las como aplicações lineares entre espaços vetoriais e verificar que estas são iguais. Ora, uma aplicação linear fica completamente determinada em conhecendo as imagens dos vetores de uma base do seu domínio. Isso sugere que se realizem os seguintes cálculos para $i = 1, \dots, n$, vendo os vetores como matrizes de $\mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} ABv_i &= A(Bv_i) & BAv_i &= B(Av_i) & (\text{o produto de matrizes é associativo}) \\ &= A(\mu_i v_i) & &= B(\lambda_i v_i) & (v_i \text{ é vetor próprio de } A \text{ e } B) \\ &= \mu_i A(v_i) & &= \lambda_i B(v_i) & (\text{linearidade do produto por escalar}) \\ &= \mu_i (\lambda_i v_i) & &= \lambda_i (\mu_i v_i) & (v_i \text{ é vetor próprio de } A \text{ e } B) \\ &= (\mu_i \lambda_i) v_i & &= (\lambda_i \mu_i) v_i & (\text{o produto por escalares é associativo}) \end{aligned}$$

Como $\mathbb{K}$ é corpo, o produto de escalares é comutativo. Logo,

$$ABv_i = BAv_i, \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Por conseguinte, $AB = BA$ porque o domínio de AB e BA é $\mathbb{R}^n$ e $(v_1, \dots, v_n)$ é base de $\mathbb{R}^n$.

Nota: Existem outros processos de demonstração, mas a proposta de demonstração apresentada é a mais compacta.