UNIVERSIDADE ABERTA www.univ-ab.pt

e-Fólio B

cartão de aprendizagem

Correcção Sumária

1. O espaço de resultados é o conjunto de todos os resultados possíveis, ou seja, no caso em análise, o conjunto

$$\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, , 5, 6, 7, 8, 9\}\},$$

onde em cada triplo (i, j, k) a primeira coordenada designa o valor do primeiro dígito (o algarismo das centenas), a segunda coordenada, j, designa o segundo dígito e a última coordenada, k, o último dígito (o algarismo das unidades). A variável aleatória subjacente é assim definida por $X : \Omega \to \{000, 001, \ldots, 999\}$,

$$X((i, j, k)) = ijk, \quad (i, j, k) \in \Omega.$$

2.

2.1. Dado $n = 0, 1, \ldots$, tem-se

$$P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$$

em que $P(X = k, Y = n-k) = P(X = k)P(Y = n-k)$ por X e Y serem, por hipótese, duas variáveis independentes. Assim, atendendo a que X e Y têm ambas distribuição de Poisson,

$$\begin{aligned} P(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k) &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k}, \end{aligned}$$

em que, pelo binómio de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} = (\lambda+\mu)^n.$$

Este exercício prova que, nas condições do enunciado do grupo 2, $X+Y$ é uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda + \mu$.

2.2. Por definição de esperança condicionada, dados $m, n = 0, 1, \ldots, n \geq m$, tem-se

$$P(X = m \,|\, X + Y = n) = \frac{P(X = m, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} = \frac{P(X = m, Y = n - m)}{P(X + Y = n)}$$

em que

$$P(X = m, Y = n - m) = P(X = m)P(Y = n - m) = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^m}{m!} \frac{\mu^{n-m}}{(n-m)!},$$

por X e Y serem independentes e de Poisson, e

$$P(X + Y = n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda + \mu)^n,$$

cf. alínea anterior. Ou seja,

$$P(X = m \,|\, X+Y = n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \frac{\lambda^m \mu^{n-m}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{m} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^m \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-m},$$

onde na última igualdade utilizou-se o facto de $(\lambda + \mu)^n = (\lambda + \mu)^m(\lambda + \mu)^{n-m}$.

> Este exercício prova que, nas condições do enunciado do grupo 2, a distribuição de X, condicionada por $X + Y$, é uma binomial de parâmetro $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

2.3. Naturalmente que X e $X+Y$ são variáveis aleatórias dependentes (o valor da soma $X + Y$ depende sempre do valor de X). Por recurso às duas alíneas anteriores, este facto pode ser confirmado, pois caso X e $X+Y$ fossem independentes, então, por exemplo, para $m = 1$ e $n = 2$ ter-se-ía que ter

$$\begin{aligned} P(X = 1 \,|\, X + Y = 2) &= \frac{P(X = 1, X + Y = 2)}{P(X + Y = 2)} = \frac{P(X = 1)P(X + Y = 2)}{P(X + Y = 2)} \\ &= P(X = 1). \end{aligned}$$

Contudo, pela alínea 2.1,

$$P(X = 1) = e^{-\lambda}\lambda$$

e, pela alínea 2.2,

$$P(X = 1 \,|\, X + Y = 2) = 2\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right).$$

Claramente, estes dois valores são diferentes.

3.

3.1. Observe-se que

$$(X - 1)^2 - (X - 2)^2 = 2X - 3.$$

Logo, resulta das hipóteses dadas que

$$\begin{aligned} 2E(X) - 3 = E(2X - 3) &= E((X - 1)^2 - (X - 2)^2) \\ &= E((X - 1)^2) - E((X - 2)^2) = 10 - 5 = 5 \end{aligned}$$

e, consequentemente, $E(X) = 4$.

3.2. De modo similar,

$$2(X-1)^2 - (X-2)^2 = X^2 - 2,$$

pelo que

$$E(X^2) = 2E((X-1)^2) - E((X-2)^2) + 2 = 17.$$

Assim, pela alínea anterior,

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 17 - 16 = 1.$$

4. Atendendo ao modo como a função de probabilidade conjunta está definida, podemos inferir que X toma valores no conjunto $\{1,2\}$ e que Y toma valores no conjunto $\{3,5\}$.

4.1.1. Logo, $P(X=1, Y\leq 4) = P(X=1, Y=3)$, em que por definição de função de probabilidade conjunta, $P(X=1,Y=3) = f(1,3) = 0.1$.

Tem-se ainda

$$P(X=2\,|\,Y=3) = \frac{P(X=2,Y=3)}{P(Y=3)},$$

com

$$P(Y=3) = P(X\in\{1,2\}, Y=3) = P(X=1,Y=3) + P(X=2,Y=3), \quad (1)$$

pelo que, novamente por definição de função de probabilidade conjunta,

$$P(X=2\,|\,Y=3) = \frac{f(2,3)}{f(1,3)+f(2,3)} = \frac{0.4}{0.5} = 0.8.$$

4.1.2. Por definição de esperança de uma variável,

$$E(X) = \sum_i iP(X=i) = 1\times P(X=1) + 2\times P(X=2),$$

em que, de um modo semelhante a (1), tem-se

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1,Y=3) + P(X=1,Y=5) = f(1,3) + f(1,5) = 0.4, \\ P(X=2) &= P(X=2,Y=3) + P(X=2,Y=5) = f(2,3) + f(2,5) = 0.6. \end{aligned}$$

Logo,

$$E(X) = 0.4 + 2\times 0.6 = 1.6.$$

De modo análogo, conclui-se que

$$E(Y) = \sum_j jP(Y=j) = 3\times P(Y=3) + 5\times P(Y=5)$$

com $P(Y=3) = f(1,3)+f(2,3) = 0.5$, cf. (1), e $P(Y=5) = f(1,5)+f(2,5) = 0.5$. Ou seja, $E(Y) = 4$.

4.1.3. Atendendo à definição de covariância,

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

resta-nos assim calcular o valor de

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_i\sum_j ijP(X=i,Y=j) \\ &= \sum_i\sum_j ijf(i,j) \\ &= 3f(1,3) + 5f(1,5) + 6f(2,3) + 10f(2,5) = 6.2. \end{aligned}$$

Obtém-se então

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 6.2 - 6.4 = -0.2.$$

4.2 A função de distribuição marginal de X é a função definida em $\mathbb{R}$ e com valores em $\mathbb{R}$, $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por

$$F_1(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pelas considerações iniciais a este grupo de questões, tem-se que:

- Se $x < 1$, $F_1(x) = P(X \leq x) = 0$;
- Se $1 \leq x < 2$, $F_1(x) = P(X \leq x) = P(X = 1) = 0.4$, cf. alínea 4.1.2;
- Se $x \geq 2$, $F_1(x) = P(X = 1) + P(X + 2) = 1$.

Ou seja,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, \ x < 1 \\ 0.4, \ 1 \leq x < 2 \\ 1, \ x \geq 2 \end{cases}$$