Exame | Instruções para a realização de exame

Álgebra Linear II | 21003

Período de Realização
Consulatar os prazos de entrega indicados pelos serviços.

Objetivos
O exame cobre potentcialmente a totalidade da matéria lecionada. A prova é composta por 5 questões, contém 2 paginas e termina com a palavra FIM.

Recursos
A prova é individual, com consulta dos recursos da unidade curricular disponíveis na plataforma.

Critérios de avaliação e cotação
Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total do exame é de 20 valores distribuídos de acordo com a tabela.

questão	1	2	3	4	5
cotação	4	5	2	4	5

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas:
   - justificações de todos os passos da resolução;
   - capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente;

- capacidade de estruturar logicamente as respostas;
- capacidade de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

   Todas as justificações terão de ser escritas por palavras do próprio.

   A bibliografia consultada terá de ser mencionada.

   Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

4. Não serão aceites respostas obtidas por meio de software, de qualquer tipo.

Normas a respeitar

A prova de exame global terá a duração de 120 minutos, à qual acresce um período de tolerância de 60 minutos.

A tolerância destina-se à revisão e formatação da resolução em pdf, tendo como objetivo principal assegurar a respetiva submissão atempada.

Deve redigir o seu exame Global na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu exame não deve ultrapassar **16** páginas A4.

Utilize letra legível, se a prova for manuscrita. Atente à qualidade e legibilidade da digitalização.

A prova deve ser entregue como um único ficheiro pdf. Não são aceitos outros formatos.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do exame global, segundo o exemplo apresentado: 000000ExameGlobal.pdf.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo Exame global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas técnicos.

No ato da entrega, assegure a integridade do ficheiro. Ficheiros que não abrem não podem ser corrigidos.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Wolfram Bentz

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Indique, justificando, qual a forma canónica de Jordan, J, semelhante à matriz A.

   b) Determine a matriz invertível Q tal que $J = Q^{-1}AQ$.

2. Considere o espaço $X = \mathbb{R}_2[x]$ dos polinómios reais de grau não superior a 2. Sendo p e q dois elementos arbitrários de X considere a função $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por $(p|q) = p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + p''(0)q''(0)$.

   a) Mostre que $(\cdot|\cdot)$ é um produto interno em X.

   b) Considere a aplicação linear $\varphi : X \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(p) = p(0) + p'(0) + p''(0)$. Existe um único elemento $u \in X$ tal que $\varphi(p) = (p|u), \forall p \in X$. Determine u.

   c) Obtenha, usando o proceso Gram-Schmidt, a partir da base $\mathcal{B} = \{1 - x^2, 1 + x^2, x\}$, uma base de X ortogonal para $(\cdot|\cdot)$.

3. Considere que $\mathbb{C}^3$ está munido do produto interno canónico e seja $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ o endomorfismo definido por

$$f(x, y, z) = (2x + (1 - i)y, (3 + 2i)x - 4iz, 2ix + (4 - 3i)y - 3z).$$

   a) Determine f^*, o endomorfismo adjunto de f.

   b) Diga, justificando, se f é um endomorfismo auto-adjunto.

4. Considere a forma bilinear $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = (g(x))|y,$$

onde $\cdot|\cdot$ é o produto interno canónico em $\mathbb{R}^3$ e onde g é um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação a $\mathcal{B}_c$, a base canónica de $\mathbb{R}^3$, é

$$A = \mathcal{M}(g; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $G_{f,\mathcal{B}_c}$, da forma bilinear f em relação a $\mathcal{B}_c$, a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

5. Considere o referencial canónico em $\mathcal{R}^3$ e as seguintes entidades geométricas:

$$\alpha: \ (x,y,z) = (2+2a-3b, 5-2a+3b, 4a-6b), \forall a,b \in \mathbb{R},$$

$$\beta: \ (3,1,2) + \langle (2,5,10) \rangle, \ \gamma: \ 6x - z = 2$$

Sendo $\delta = \beta \cap \gamma, \ \epsilon = \alpha \cap \beta$ esclareça, justificando detalhadamente, a natureza de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ e ϵ (isto é, quais são rectas, quais são planos, etc).

FIM