ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 11 a 21 de janeiro de 2019

Data de Limite de Entrega

21 de janeiro de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Espaços Vetoriais. Aplicações Lineares. Valores e Vetores Próprios.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes, determinantes, valores e vetores próprios.

Trabalho a desenvolver

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.
- O primeiro grupo contem questões de escolha múltipla, cuja resposta não necessita de justificação.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.
Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores.
A classificação dos restantes Grupos é a seguinte

II.	III.	IV.	V.
0.5	1	1	0.5

.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em pdf devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 10 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato pdf para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato pdf a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

1. Seja $A \in \mathscr{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com característica 3.

Então

- ☐ **a)** $\det A = 3$.
- ☐ **b)** $\det A = 1$.
- ☐ **c)** $\det(A^{-1}) = -1$.
- ☐ **d)** $A = A^2 A^{-1}$.

2. Considere os subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = z - w\} \text{ e } G = \langle (0,0,1,1), (1,0,0,2) \rangle.$$

Então

- ☐ **a)** $\dim F = 2$.
- ☐ **b)** $\dim(F \cap G) = 2$.
- ☐ **c)** $\dim F = 3$.
- ☐ **d)** $\dim(F + G) = 3$.

3. Seja $A \in \mathscr{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ com valores próprios $1, 2, 3$ e 4.

Então

- ☐ **a)** Existem vetores não nulos u e v tais que $A(u+v) = 3u+4v$.
- ☐ **b)** Não existe um vetor não nulo u tal que $A^2 u = u$.
- ☐ **c)** A não é diagonalizável.
- ☐ **d)** A característica de linha de A é 3.

4. Sejam u e v vetores linearmente independentes de um espaço linear E.

Então

- ☐ **a)** $u + v$ e $u - v$ são linearmente independentes.
- ☐ **b)** A sequência (u, v) é uma base de E.
- ☐ **c)** u e v geram E.
- ☐ **d)** O espaço E tem dimensão 3.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação seguinte, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{C})$ matrizes semelhantes e u um vetor próprio de A.

Então $\sqrt{2}u$ é um vetor próprio de B.

III. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ a transformação linear definida por

$$T(a,b,c) = ax^2 + cx + b.$$

i) Determine a matriz A que representa T em relação à base canónica no espaço de partida e à base $(x^2, x, 1)$ no espaço de chegada.

ii) Determine os valores próprios de A.

iii) Determine uma base para o espaço próprio associado a cada um dos valores próprios de A, e indique a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

iv) Diga, justificadamente, se existe uma matriz que diagonaliza A, e em caso afirmativo determine uma matriz diagonalizante.

v) Verifique que a matriz que obteve na alínea anterior diagonaliza de facto A.

IV. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(a,b,c) = (c-a, c+b)$.

i) Determine a matriz que representa f em relação à base canónica no espaço de partida e de chegada.

ii) Mostre que a sequência $\mathcal{B}_1 = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

iii) Mostre que a sequência $\mathcal{B}_2 = ((0,2),(-1,0))$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

iv) Deterrmine a matriz que representa f em relação à base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ e à base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.

V. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz invertível.

Mostre que existem $u \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, não nulos, tais que

$$u = \frac{1}{\lambda^n} A^n u.$$

FIM