



# Matemática Finita | 21082

## Período de Realização

Decorre de 29 de março a 8 de abril de 2019

## Data de Limite de Entrega

8 de abril de 2019, até às 23h55 de Portugal Continental

## Tema

Combinatória Enumerativa

## Trabalho a desenvolver

Resolução dos 8 grupos de exercícios constantes no enunciado.

## Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorrecta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1-3	ERRADAS				
C					
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	<b>0.9</b>			

<b>4.</b>	<b>5.</b>	<b>6.</b>	<b>7.</b>	<b>8.</b>
<b>0.5 val.</b>	<b>0.4 val.</b>	<b>0.5 val.</b>	<b>1.1 val.</b>	<b>0.6 val.</b>

### Normas a respeitar

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira e Ana Nunes

## Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Uma delegação do Banco Alimentar possui  $n$  alimentos diferentes que se podem distribuir de 10 maneiras diferentes em cabazes de 3 alimentos distintos. Daqui pode concluir-se que
  - A)  $n = 5$
  - B)  $n = 6$
  - C)  $n = 7$
  - D) Nenhum dos valores anteriores
  
2. Relativamente à soma de sete quaisquer números inteiros consecutivos pode afirmar-se:
  - A) A soma não é divisível por 7
  - B) A soma só é divisível por 7 se a primeira parcela é divisível por 7
  - C) A soma só é divisível por 7 se uma das parcelas é divisível por 7
  - D) A soma é divisível por 7
  
3. Num processo de extracção de 4 bolas numeradas entre 1 e 45, o valor  $\frac{45!}{41!}$  corresponde ao número de maneiras de as 4 bolas extraídas...
  - (i) ... serem todas distintas e provenientes de uma mesma urna contendo 45 bolas numeradas de 1 a 45
  - (ii) ... serem todas distintas e provenientes de 4 urnas diferentes, cada uma com 45 bolas numeradas de 1 a 45
  - (iii) ... serem todas distintas, independentemente de terem sido retiradas de uma mesma urna com 45 bolas numeradas de 1 a 45, ou de 4 urnas diferentes cada uma contendo 45 bolas numeradas de 1 a 45
  - (iv) ... serem todas distintas, independentemente de terem sido retiradas de uma mesma urna, ou de duas, ou de 3, ou de 4 urnas diferentes, em que cada urna envolvida contém sempre 45 bolas numeradas de 1 a 45Relativamente às opções (i), (ii), (iii) e (iv) podemos afirmar:
  - A) Apenas a opção (i) é verdadeira
  - B) Apenas a opção (ii) é verdadeira
  - C) As opções (i), (ii) e (iii) são verdadeiras, mas a opção (iv) é falsa
  - D) Todas as opções são verdadeiras

4. Para calcular quantos números existem com 4 algarismos escolhidos entre 1 e 9 e que contêm o algarismo 8, uma aluna respondeu da maneira seguinte:

*Começando pelo algarismo 8, podemos escolher 4 posições possíveis. Escolhida uma posição para o algarismo 8, qualquer uma das restantes posições pode ser ocupada por qualquer dígito entre 1 e 9 (uma vez que não está excluída a possibilidade do algarismo 8 poder voltar a aparecer). Ou seja, existem  $9 \times 9 \times 9 = 729$  possibilidades para preencher as restantes 3 posições. Desta forma, conclui-se que existem  $4 \times 729$  números com 4 algarismos pertencentes a  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e que contêm os algarismo 8.*

Analise esta resposta e, caso necessário, corrija-a.

5. Dados dois conjuntos  $X, Z \neq \emptyset$  e um conjunto enumerável  $Y$ , considere as aplicações  $f : X \rightarrow Y$  e  $h : Y \rightarrow Z$  tais que a aplicação composta  $h \circ f$  verifica  $(h \circ f)(X) = Z$ . Mostre que o conjunto  $Z$  é enumerável.

6. Verifique que o coeficiente de  $x^n$  no desenvolvimento de

$$(1+x)^{2n} + x(1+x)^{2n-1} + x^2(1+x)^{2n-2} + \dots + x^n(1+x)^n$$

é igual a

$$\binom{2n+1}{n}.$$

7.

- 7.1. Sem utilizar o método de indução matemática, verifique que para qualquer  $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ , a soma

$$(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$$

é sempre um número natural par.

- 7.2. Por recurso ao método de indução matemática, mostre que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n = b_n \sqrt{2}$$

para  $b_n \in \mathbb{N}$ .

8. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , prove que

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m}^2 \binom{m}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{n+k}{k}$$

para cada  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $0 \leq k \leq n$ .

FIM