U.C. 21002
Álgebra Linear I

29 de janeiro de 2020

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II** a **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	**III**	**IV**	**V**	**VI**
3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Então:

- ☐ a) A é invertível.
- ☐ b) $\det A = 3$.
- ☐ c) $\det(2A) = 3 \det A$.
- ☐ d) $\det(-A) = \det A$.

Questão 2

Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x, y)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y) = (x + y, y, x)$. Então:

- ☐ a) $\operatorname{Nuc} f = \langle(1, 0, 0)\rangle$.
- ☐ b) $g(1, 1) = (1, 1, 1)$
- ☐ c) $(g \circ f)(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.
- ☐ d) $\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Nuc}(g \circ f)$.

Questão 3

Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com valores próprios $1, 2$ e 3. Então:

- ☐ a) $A = A^{-1}$.
- ☐ b) $\det A = 5$.
- ☐ c) $\det(A+I_3) = \det(A+2I_3)$.
- ☐ d) $\det(A-I_3) = \det(A-2I_3)$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja $F = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = -d \text{ e } b = c \}$. Então:

- ☐ a) F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\dim F = 1$.
- ☐ b) $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{smallmatrix}\right) \in F$.
- ☐ c) $F = \langle \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$.
- ☐ d) F é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\dim F = 4$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Sejam F e G subespaços de $\mathbb{R}^3$ definidos por $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = z\}$ e $G = \langle (1, -1, 0)\ ,\ (1, 1, 2) \rangle$. Então $F = G$.

b) Seja E um espaço linear e sejam u, v e w vetores de E linearmente dependentes. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha v + \beta w$.

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = -2 \\ x - y + 3z = 5 \\ -x + y + z = -1 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Verifique que as (eventuais) soluções que obteve satisfazem de facto o sistema.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Seja $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

c) Determine se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

V. Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$T(a, b, c) = ax^2 + (a + b)x + a + b + c.$$

a) Mostre que T é uma aplicação linear.

b) Determine o núcleo de T.

c) Determine a dimensão da imagem de T.

d) Considerando as bases canónicas em $\mathbb{R}^3$ e em $\mathbb{R}_2[x]$ determine a matriz que representa T.

e) Determine se T é injetiva, e se T é sobrejetiva.

f) Determine se T é invertível, e em caso afirmativo determine a matriz que representa a inversa de T.

VI. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$, e $w \in \mathbb{R}^n$.

Mostre que $v = (A - I_n)w$ é solução do sistema $Ax = 0$.

FIM